

Комплекс программ для численного решения
стохастических дифференциальных уравнений и
стохастических дифференциальных уравнений с
частными производными методом Монте-Карло
на суперкомпьютере

Д.Д. Смирнов
ИВМиМГ СО РАН

Задача Коши для стохастических дифференциальных уравнений

Задача Коши для стохастического дифференциального уравнения (СДУ) в смысле Ито записывается в виде:

$$dY(t) = a(Y, t)dt + \Sigma(Y, t)dW(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

где $Y(t)$ – непрерывный случайный процесс размера n , Y_0 – случайный вектор размера n , $a(Y, t)$ – вектор сноса размера n , $\Sigma(Y, t)$ – матрица диффузии размера $n \times m$, $W(t)$ – винеровский процесс размера m .

Численный метод для решения СДУ

Для численного решения СДУ в смысле Ито используется наименее трудоёмкий обобщённый явный метод Эйлера в виде:

$$Y^{(n+1)} = Y^{(n)} + a(Y^{(n)}, t^{(n)})h + \Sigma(Y^{(n)}, t^{(n)})\sqrt{h}\xi^{(n+1)},$$

$$n = 0, \dots, N - 1,$$

где h - шаг интегрирования, $\xi^{(n+1)}$ – стандартные нормальные независимые между собой случайные вектора размера m , компоненты которых моделируются по формулам

$\xi = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2$ и $\eta = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2$, где α_1 и α_2 равномерно распределённые на отрезке $(0,1)$ псевдослучайные величины, полученные с помощью генератора псевдослучайных чисел.

Постановка задачи

Линейный колебательный контур с шумящим коэффициентом записывается в виде СДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\omega^2 + \sigma \frac{dw}{dt} \right) y = 0$$

с начальными условиями $y(0) = \xi \in \mathbb{N}(1,1)$, $\frac{dy(0)}{dt} = 0$,

то есть, когда шумит частота колебаний и отсутствует декремент затухания, тогда математическое ожидание запишется в виде ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 m}{dt^2} + \omega^2 m = 0$$

с начальными условиями $m(0) = \mathbb{E}y(0) = 1$, $\frac{dm(0)}{dt} = 0$.

Точное решение этого уравнения равно $m(t) = \cos \omega t$.

Переход к системе СДУ в смысле Ито

Делая замену переменных $y_1 = y$, $y_2 = \frac{dy}{dt}$, получаем из СДУ второго порядка двумерную систему СДУ в виде:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= \xi, \\ dy_2 &= -\omega^2 y_1 dt - \sigma y_1 dw(t), & y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

или виде:

$$d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 y_1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma y_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_1(t) \\ dw_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в векторном виде СДУ в смысле Ито:

$$dY(t) = a(Y, t)dt + \Sigma(Y, t)dW(t), \quad Y(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a(Y, t) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 y_1 \end{pmatrix}$ вектор сноса, а $\Sigma(Y, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma y_1 & 0 \end{pmatrix}$ матрица диффузии.

Переход к системе ОДУ для математического ожидания

Аналогично, делая замену переменных $m_1 = m$, $m_2 = \frac{dm}{dt}$, получаем из ОДУ второго порядка двумерную систему ОДУ в виде:

$$dm_1 = m_2 dt, \quad m_1(0) = 1,$$

$$dm_2 = -\omega^2 m_1 dt, \quad m_2(0) = 0,$$

или в виде:

$$d \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 \\ -\omega^2 m_1 \end{pmatrix} dt, \quad \begin{pmatrix} m_1(0) \\ m_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в векторном виде:

$$dM(t) = a(M, t)dt, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Разностная схема, полученная методом Эйлера для системы СДУ

Применяя метод Эйлера к двумерной системе СДУ, получаем следующую разностную схему в виде:

$$\begin{aligned}y_1^{(n+1)} &= y_1^{(n)} + y_2^{(n)} h, & y_1^{(0)} &= \xi, \\y_2^{(n+1)} &= y_2^{(n)} - \omega^2 y_1^{(n)} h - \sigma y_1^{(n)} \sqrt{h} \xi^{(n+1)}, & y_2^{(0)} &= 0.\end{aligned}$$

Оценка математического ожидания $y_1^{(n+1)}$ вычисляется по формуле:

$$m_1^{(n+1)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K y_1^{(n+1,i)}$$

K – количество смоделированных траекторий $y_1^{(n+1)}$.

Разностная схема, полученная методом Эйлера для системы ОДУ

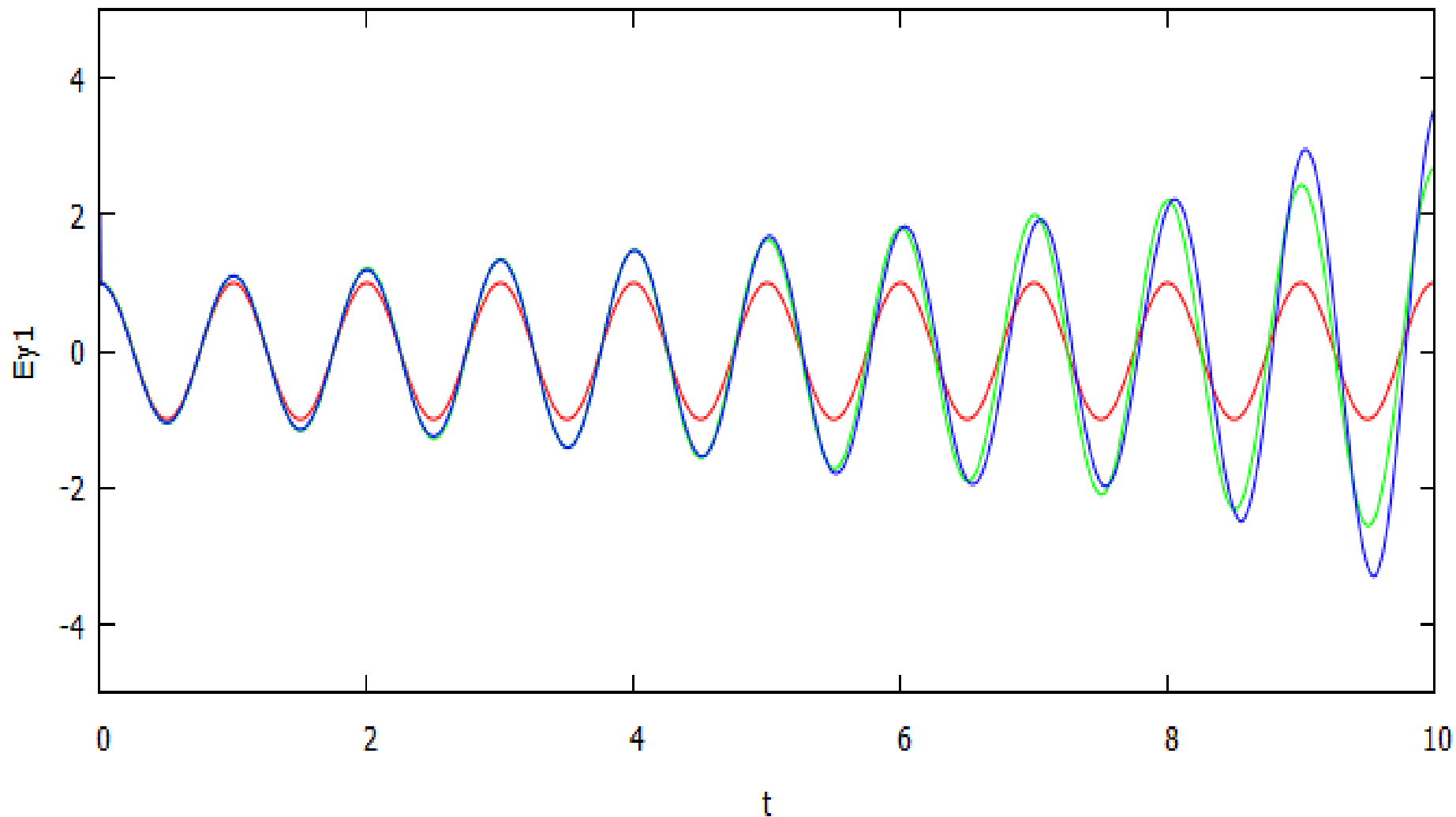
Применяя метод Эйлера к двумерной системе ОДУ, получаем следующую разностную схему в виде:

$$m_1^{(n+1)} = m_1^{(n)} + m_2^{(n)} h, \quad m_1^{(0)} = 1,$$

$$m_2^{(n+1)} = m_2^{(n)} - \omega^2 m_1^{(n)} h, \quad m_2^{(0)} = 0.$$

Оценка математического ожидания $m_1^{(n+1)}$ находится в $n + 1$ узле при решении данной системы.

На отрезке $t \in [0,10]$ с шагом $h = 5 \cdot 10^{-3}$, моделировалось $K = 10^5$ траекторий и задавались частота колебаний $\omega = 2\pi$ и интенсивность шума $\sigma = 7$.



Постановка задачи

Двумерное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t), \quad 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2, \quad 0 < t \leq T.$$

с начальными условиями

$$U(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad t = 0$$

и граничными условиями

$$U(x, 0, t) = \varphi_1(x, t), \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad y = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$U(x, L_2, t) = \varphi_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad y = L_2, \quad 0 < t \leq T,$$

$$U(0, y, t) = \varphi_3(y, t), \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad 0 < t \leq T,$$

$$U(L_1, y, t) = \varphi_4(y, t), \quad x = L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad 0 < t \leq T.$$

В данной работе источником $F(x, y, t)$ будет являться производная винеровского процесса $W(t)$, зависящего только от переменной t , с заданной интенсивностью σ .

Дискретная схема

На пространственно-временной области

$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{T} = \{0 \leq x \leq L_1; 0 \leq y \leq L_2; 0 \leq t \leq T\}$ введём сетку

$\omega_{h_x h_y \tau} = \{x_i = ih_x, i = \overline{0, L_x}; y_j = jh_y, j = \overline{0, L_y}; t^n = n\tau, n = \overline{0, N}\}$ с

пространственными шагами $h_x = \frac{L_1}{L_x}$ и $h_y = \frac{L_2}{L_y}$ и с временным шагом $\tau = \frac{T}{N}$.

Для решения задачи используется метод переменных направлений

$$\frac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\frac{\tau}{2}} = \nu \left(\frac{U_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{U_{ij+1}^n - 2U_{ij}^n + U_{ij-1}^n}{h_y^2} \right) + F_{ij}^{n+\frac{1}{2}};$$

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \nu \left(\frac{U_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{U_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} \right) + F_{ij}^{n+\frac{1}{2}};$$

$$i = \overline{1, L_x - 1}, j = \overline{1, L_y - 1}, n = \overline{0, N - 1},$$

$$U_{ij}^0 = \psi(x_i, y_j), i = \overline{0, L_x}, j = \overline{0, L_y},$$

$$U_{i0}^n = \varphi_1(x_i, t^n), i = \overline{0, L_x}, n = \overline{1, N},$$

$$U_{ij}^n = \varphi_2(x_i, t^n), i = \overline{0, L_x}, n = \overline{1, N},$$

$$U_{0j}^n = \varphi_3(y_j, t^n), j = \overline{1, L_y - 1}, n = \overline{1, N},$$

$$U_{lj}^n = \varphi_4(y_j, t^n), j = \overline{1, L_y - 1}, n = \overline{1, N}.$$

Решаемая задача

Решалась задача

$$dU = 0.125 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dt + \sigma(U(x, y, t)) dW(t),$$
$$0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < t \leq 1.$$

с начальными условиями

$$U(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, t = 0$$

и граничными условиями

$$U(x, 0, t) = 0.2 \sin \pi x, 0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 < t \leq 1,$$

$$U(x, 1, t) = 0.2 \sin \pi x, 0 \leq x \leq 1, y = 1, 0 < t \leq 1,$$

$$U(0, y, t) = 0.2 \sin \pi y, x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 < t \leq 1,$$

$$U(1, y, t) = 0.2 \sin \pi y, x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < t \leq 1.$$

И рассматривались два варианта: $\sigma(U(x, y, t)) = 0.05$ и $\sigma(U(x, y, t)) = 10 \cdot U(x, y, t)$.

Дискретизация решаемой задачи

Задавались следующие значения пространственных и временных шагов: $h_x = 10^{-4}$, $h_y = 10^{-4}$, $\tau = 10^{-6}$ и моделировалось $K = 10^7$ реализаций.

$$\frac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\frac{\tau}{2}} = 0.125 \left(\frac{U_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{U_{ij+1}^n - 2U_{ij}^n + U_{ij-1}^n}{h_y^2} \right) + F_{ij}^{n+\frac{1}{2}};$$

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = 0.125 \left(\frac{U_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{U_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} \right) + F_{ij}^{n+\frac{1}{2}};$$

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0.05\sqrt{\tau}\xi^{n+\frac{1}{2}} \\ 10U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\tau}\xi^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}, \text{ где } \xi^{n+\frac{1}{2}} \text{ последовательность независимых стандартных}$$

нормальных случайных величин, которые моделируются по формулам $\sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2$ и $\sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2$, где α_1, α_2 – независимые случайные величины, равномерно распределённые в интервале (0,1) и генерируемые с помощью датчика псевдослучайных чисел **rnd128**.

$$i = \overline{1, 10^4 - 1}, j = \overline{1, 10^4 - 1}, n = \overline{0, 10^6 - 1},$$

$$U_{ij}^0 = 0, i = \overline{0, 10^4}, j = \overline{0, 10^4},$$

$$U_{i0}^n = 0.2 \sin \pi x_i, i = \overline{0, 10^4}, n = \overline{1, 10^6},$$

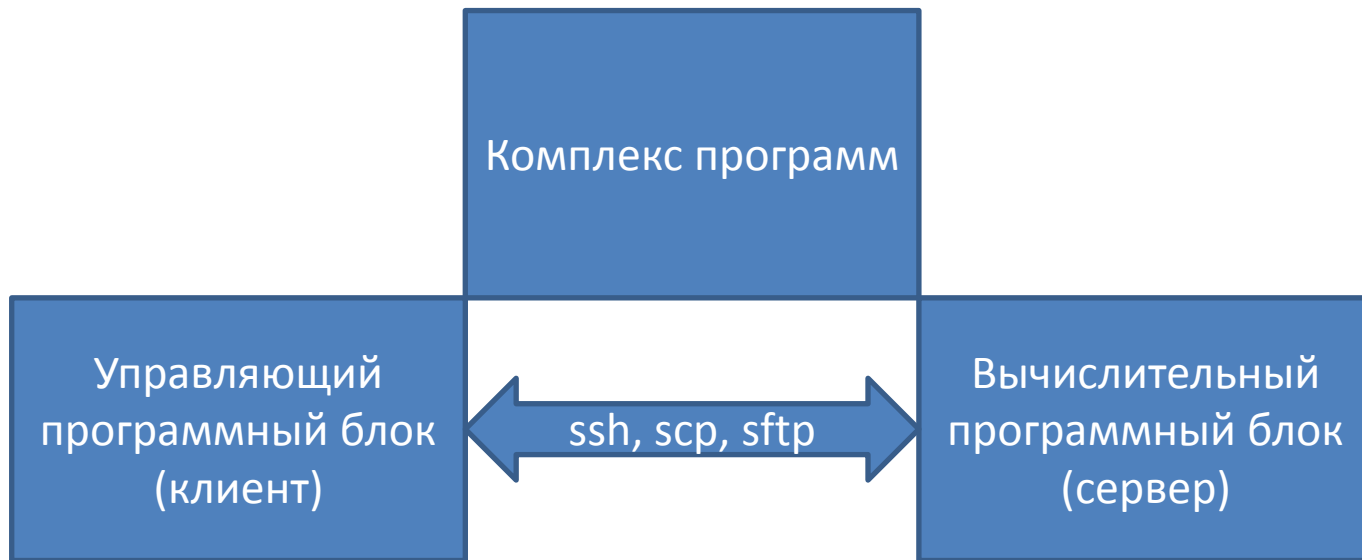
$$U_{ij}^n = 0.2 \sin \pi x_i, i = \overline{0, 10^4}, n = \overline{1, 10^6},$$

$$U_{0j}^n = 0.2 \sin \pi y_j, j = \overline{1, 10^4 - 1}, n = \overline{1, 10^6},$$

$$U_{ij}^n = 0.2 \sin \pi y_j, j = \overline{1, 10^4 - 1}, n = \overline{1, 10^6}.$$

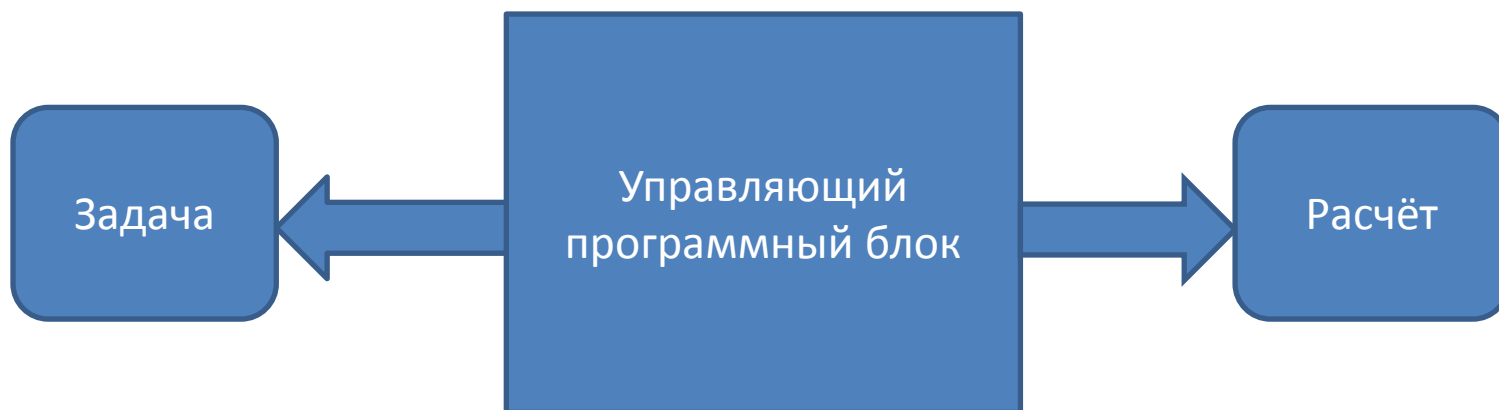
Описание комплекса программ

Комплекс программ соответствует модели «клиент-сервер», который состоит из управляющего программного блока («клиент») и вычислительного программного блока («сервер»).



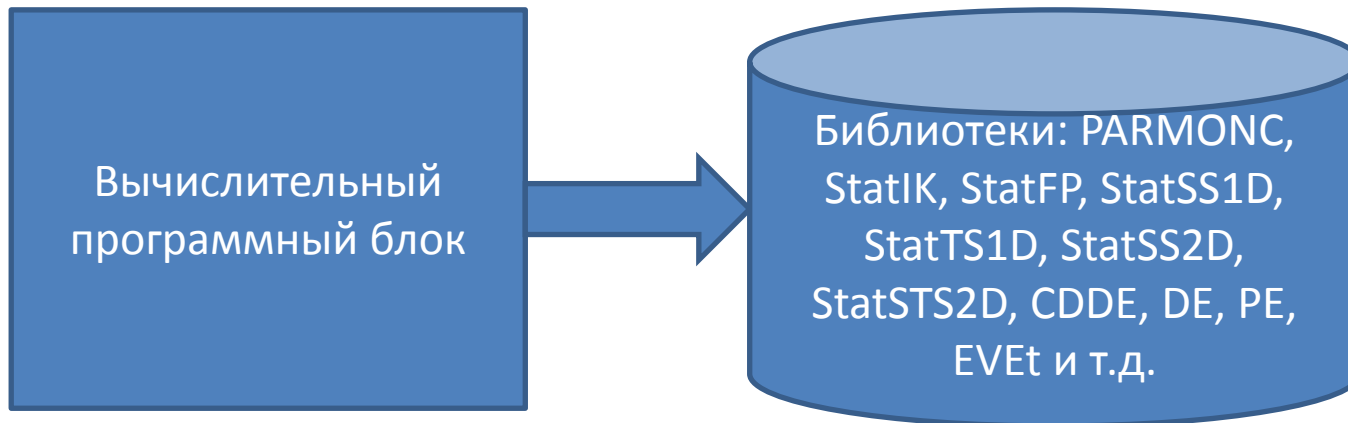
Управляющий программный блок

Управляющий программный блок устанавливается на персональном компьютере и состоит из двух объектов: объект «Задача» и объект «Расчёт».



Вычислительный программный блок

Вычислительный программный блок устанавливается на персональный компьютер или на суперкомпьютер (содержит различные библиотеки, например, библиотеку PARMONC) и производит расчёт задачи, подготовленной в управляющем программном блоке.



Описание библиотек

Библиотека PARMONC

Библиотека PARMONC предназначена для распараллеливания широкого круга трудоёмких приложений метода Монте-Карло. Ядром библиотеки является быстрый и надёжный длиннопериодный генератор псевдослучайных чисел. Для получения одного псевдослучайного числа, равномерно распределённого в интервале от 0 до 1 используется функция **rnd128**.

128-битный конгруэнтный генератор псевдослучайных чисел:

$u_0 = 1, u_n \equiv u_{n-1}A \pmod{2^{128}}, \alpha_n = u_n 2^{-128}, n = 1, 2, \dots,$
где $A \equiv 5^{100109} \pmod{2^{128}}$. Последовательность чисел $\{\alpha_n\}$
является периодической с длиной периода $L = 2^{126} \approx 10^{38}$.

Параллельная реализация

Выбирается значение прыжка μ генератора из соображений, чтобы μ псевдослучайных чисел хватало для моделирования на каждом процессоре. Последовательность $\{u_n\}$ разбивается на подпоследовательности длины μ , начинающиеся с чисел $u_{t\mu}$, $t = 0, 1, \dots$, где t – номер процессора. Разные подпоследовательности используются на разных процессорах, таким образом значение $u_{t\mu}$ находится по формуле:

$$u_{(t+1)\mu} = u_{t\mu} A_\mu \pmod{2^{128}},$$

где $A_\mu = A^\mu \pmod{2^{128}}$, тогда для моделирование на t -ом процессоре используется формула:

$$\alpha_{t\mu} = u_{t\mu} 2^{-128}.$$

Библиотеки StatIK, StatFP, StatSS2D, StatSTS2D, PE, EVEt

Библиотеки StatIK, StatFP используются при решении СДУ для вычисления Статистической (частотной) интегральной кривой и Статистического (частотного) фазового портрета соответственно.

Библиотеки StatSS2D, StatSTS2D используются при решении двумерных СДУЧП для вычисления Статистического (частотного) пространственного сечения и Статистического (частотного) пространственно-временного сечения соответственно.

Библиотека PE используется при решении СДУ и СДУЧП для оценки вероятности того, что решение лежит в определённом интервале.

Библиотека EVEt используется при решении СДУЧП для оценки среднего значения $U(x, y, t)$ в фиксированный момент времени.

Формальное определение введённых характеристик

Статистическая (частотная) интегральная кривая

На области $\mathbb{T} \times \mathbb{U} = \{T_0 \leq T \leq T_{end}; U_0 \leq U \leq U_{end}\}$ введём

сетку $\omega_{h_T h_U} = \{T_i = T_0 + ih_T, i = \overline{0, N_T}; U_j = U_0 + jh_U, j = \overline{0, N_U}\}$ с шагом $h_T = \frac{T_{end} - T_0}{N_T}$ и

с шагом $h_U = \frac{U_{end} - U_0}{N_U}$. Границы области $T_0, T_{end}, U_0, U_{end}$ и количество узлов сетки

$N_T + 1, N_U + 1$ вводятся произвольно. ЧИК строится следующим образом:

вычисляется количество пар $(t^n, y_p(t^n))$,

попавших в (T_i, U_j) площадку сетки $\omega_{h_T h_U}$ для всех моментов времени $t^n, n = \overline{0, N}$

и для всех смоделированных траекторий $k = \overline{1, K}$.

$W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (t^n, y_p(t^n)) \in (T_i, U_j), n = \overline{0, N}, k = \overline{1, K}\}$, где

индексы i и j площадки (T_i, U_j) сетки $\omega_{h_T h_U}$ определяются следующим образом:

$i = \left[\frac{t^n - T_0}{h_T} \right], j = \left[\frac{y_p(t^n) - U_0}{h_U} \right]$, где $[]$ – целая часть числа.

Формальное определение введённых характеристик

Статистический (частотный) фазовый портрет

На области $\mathbb{U} \times \mathbb{V} = \{U_0 \leq U \leq U_{end}; V_0 \leq V \leq V_{end}\}$ введём

сетку $\omega_{h_U h_V} = \{U_i = U_0 + ih_U, i = \overline{0, N_U}; V_j = V_0 + jh_V, j = \overline{0, N_V}\}$ с шагом $h_U = \frac{U_{end} - U_0}{N_U}$ и

с шагом $h_V = \frac{V_{end} - V_0}{N_V}$. Границы области $U_0, U_{end}, V_0, V_{end}$ и количество узлов сетки

$N_U + 1, N_V + 1$ вводятся произвольно. ЧФП строится следующим образом:

вычисляется количество пар $(y_p(t^n), y_q(t^n))$,

попавших в (U_i, V_j) площадку сетки $\omega_{h_U h_V}$ для всех моментов времени $t^n, n = \overline{0, N}$

и для всех смоделированных траекторий $k = \overline{1, K}$.

$W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (y_p(t^n), y_q(t^n)) \in (U_i, V_j), n = \overline{0, N}, k = \overline{1, K}\}$, где

индексы i и j площадки (U_i, V_j) сетки $\omega_{h_U h_V}$ определяются следующим образом:

$i = \left[\frac{y_p(t^n) - U_0}{h_U} \right], j = \left[\frac{y_q(t^n) - V_0}{h_V} \right]$, где $[]$ – целая часть числа.

График ЧИК для линейного колебательного контура

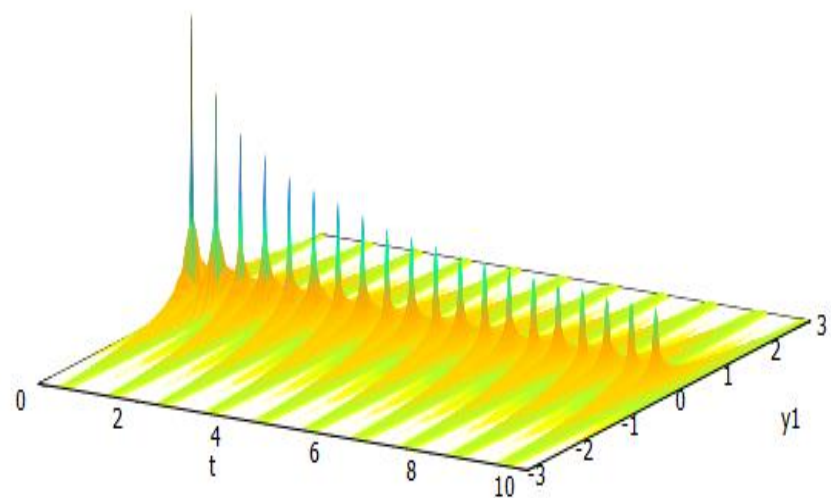
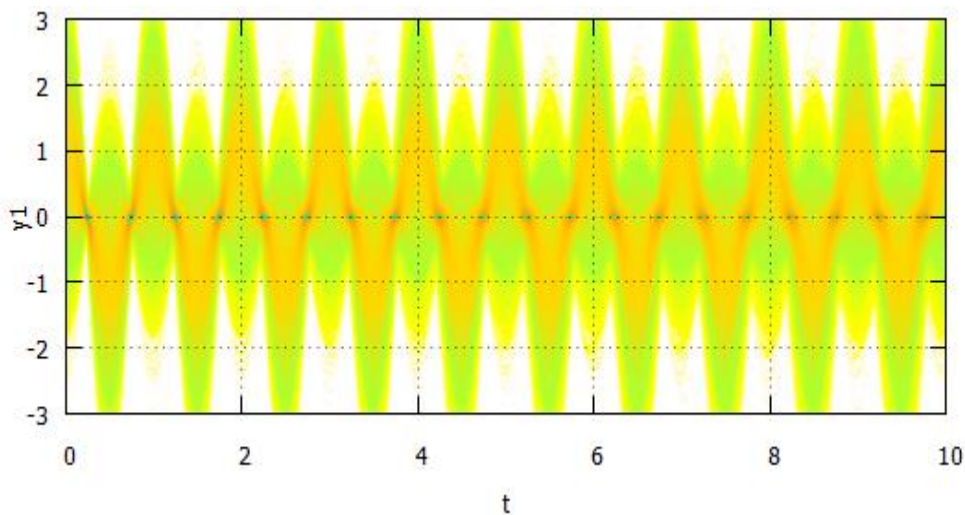
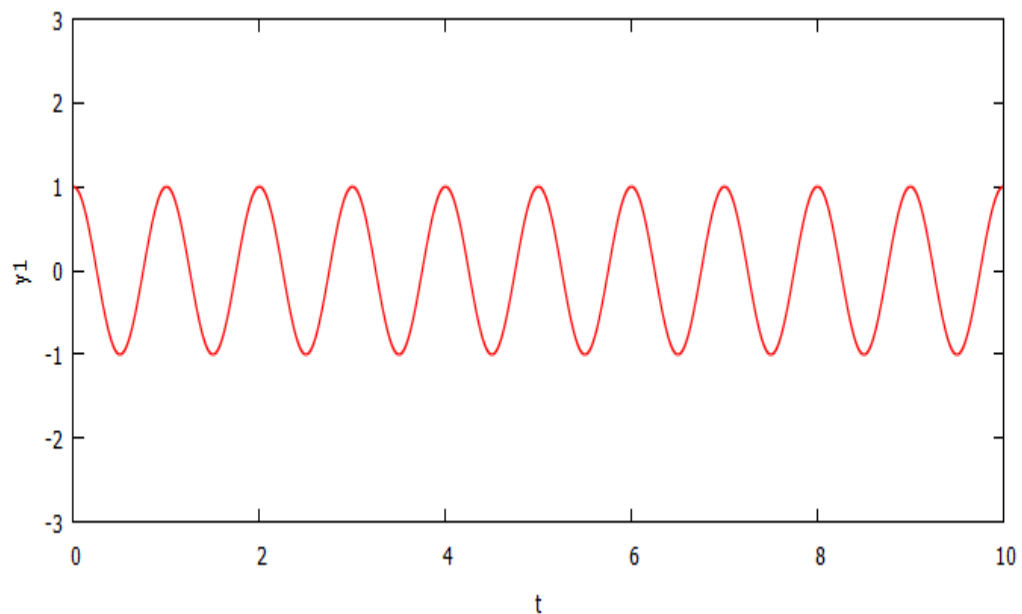
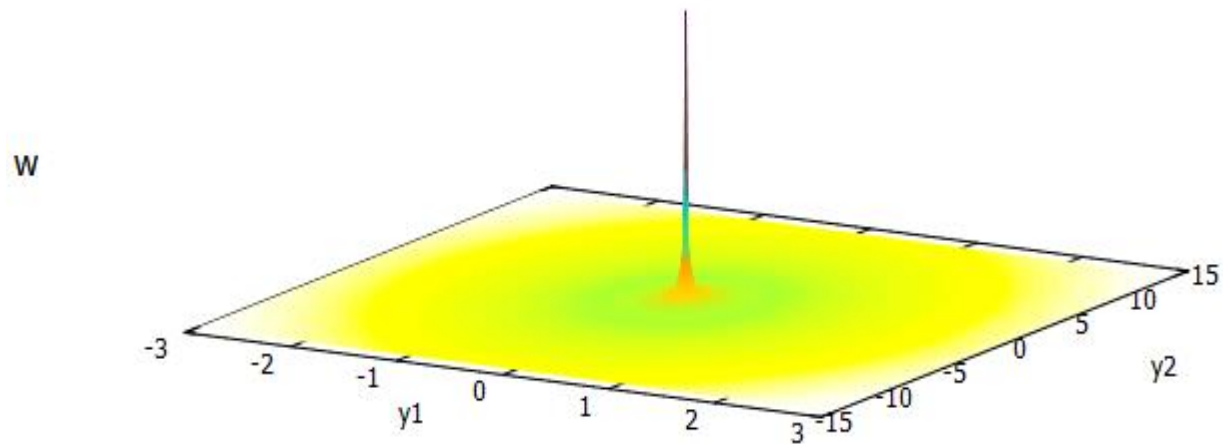
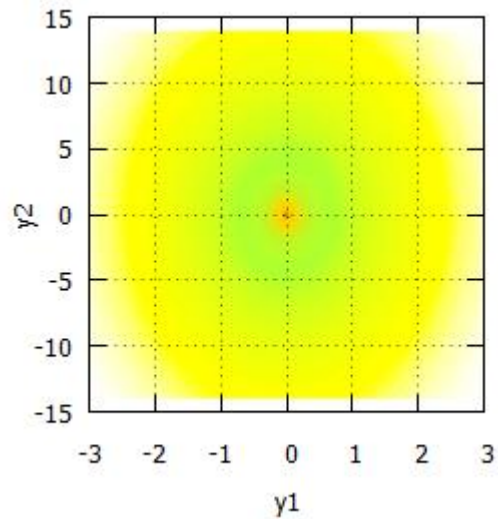
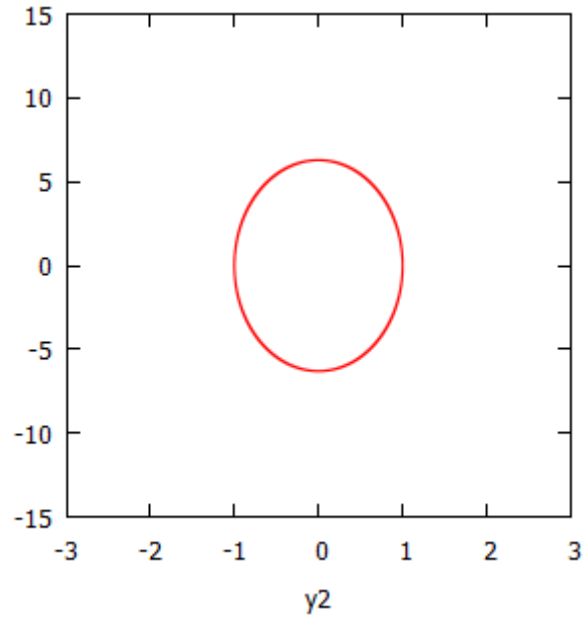
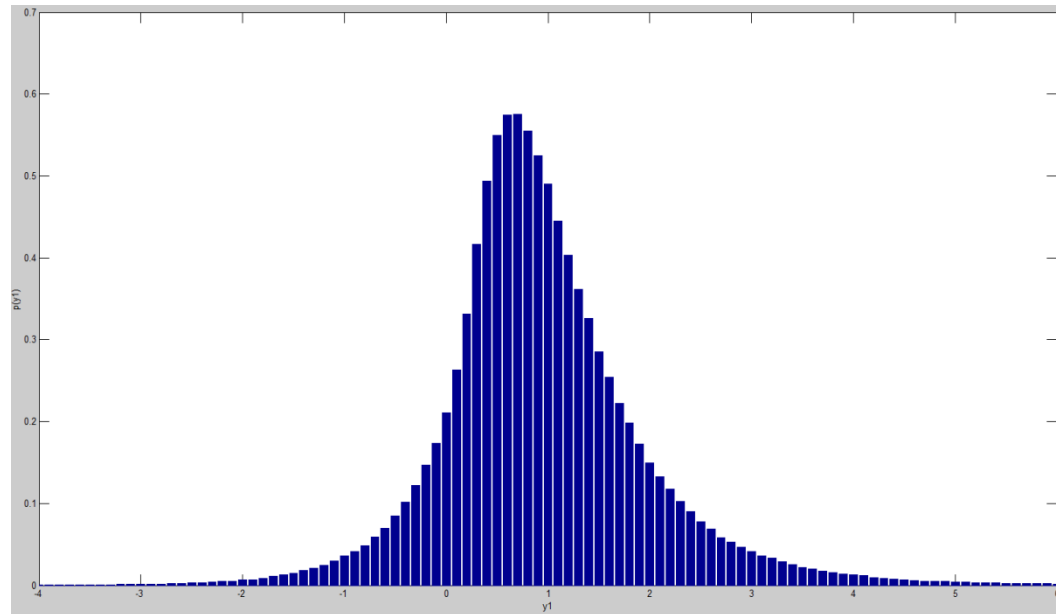


График ЧФП для линейного колебательного контура



Гистограмма и вероятность попадания в интервал



На рисунке приведена гистограмма оценки плотности вероятностей для решения $y_1(t)$ в точке интервала интегрирования $T = 100$. Смоделированные значения $y_1(T)$ попадают в интервал $[-3,5]$ с вероятностью $p = 0.9967$.

Формальное определение введённых характеристик

Статистическое пространственное сечение

На области $\mathbb{T} \times \mathbb{U} = \{T_0 \leq T \leq T_{end}; U_0 \leq U \leq U_{end}\}$ введём

сетку $\omega_{h_T h_U} = \{T_i = T_0 + ih_T, i = \overline{0, N_T}; U_j = U_0 + jh_U, j = \overline{0, N_U}\}$ с шагом $h_T = \frac{T_{end} - T_0}{N_T}$ и

с шагом $h_U = \frac{U_{end} - U_0}{N_U}$. Границы области $T_0, T_{end}, U_0, U_{end}$ и количество узлов сетки

$N_T + 1, N_U + 1$ вводятся произвольно. СПС строится следующим образом:

выбирается пространственная координата x_* и y_* и вычисляется количество пар $(t^n, U(x_*, y_*, t^n))$,

попавших в (T_i, U_j) площадку сетки $\omega_{h_T h_U}$ для всех моментов времени $t^n, n = \overline{0, N}$

и для всех смоделированных траекторий $k = \overline{1, K}$.

$W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (t^n, U(x_*, y_*, t^n)) \in (T_i, U_j), n = \overline{0, N}, k = \overline{1, K}\}$, где

индексы i и j площадки (T_i, U_j) сетки $\omega_{h_T h_U}$ определяются следующим образом:

$$i = \left[\frac{t^n - T_0}{h_T} \right], j = \left[\frac{U(x_*, y_*, t^n) - U_0}{h_U} \right], \text{ где } [] - \text{целая часть числа.}$$

Формальное определение введённых характеристик

Статистическое пространственно-временное сечение (для x)

На области $\mathbb{X} \times \mathbb{U} = \{X_0 \leq X \leq X_{end}; U_0 \leq U \leq U_{end}\}$ введём

сетку $\omega_{h_X h_U} = \{X_i = X_0 + ih_X, i = \overline{0, N_X}; U_j = U_0 + jh_U, j = \overline{0, N_U}\}$ с шагом $h_X = \frac{X_{end} - X_0}{N_X}$ и

с шагом $h_U = \frac{U_{end} - U_0}{N_U}$. Границы области $X_0, X_{end}, U_0, U_{end}$ и количество узлов сетки

$N_X + 1, N_U + 1$ вводятся произвольно. СПВС строится следующим образом:

выбирается пространственная координата y_* и выбирается момент времени t^*

и вычисляется количество пар $(x_n, U(x_n, y_*, t^*))$,

попавших в (X_i, U_j) площадку сетки $\omega_{h_X h_U}$ для всех пространственных координат

$x_n, n = \overline{0, L_x}$ и для всех смоделированных траекторий $k = \overline{1, K}$.

$W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (x_n, U(x_n, y_*, t^*)) \in (X_i, U_j), n = \overline{0, L_x}, k = \overline{1, K}\}$, где

индексы i и j площадки (X_i, U_j) сетки $\omega_{h_X h_U}$ определяются следующим образом:

$i = \left[\frac{x_n - X_0}{h_X} \right], j = \left[\frac{U(x_n, y_*, t^*) - U_0}{h_U} \right]$, где $[]$ – целая часть числа.

Формальное определение введённых характеристик

Статистическое пространственно-временное сечение (для y)

На области $\mathbb{Y} \times \mathbb{U} = \{Y_0 \leq Y \leq Y_{end}; U_0 \leq U \leq U_{end}\}$ введём

сетку $\omega_{h_Y h_U} = \{Y_i = Y_0 + ih_Y, i = \overline{0, N_Y}; U_j = U_0 + jh_U, j = \overline{0, N_U}\}$ с шагом $h_Y = \frac{Y_{end} - Y_0}{N_Y}$ и

с шагом $h_U = \frac{U_{end} - U_0}{N_U}$. Границы области $Y_0, Y_{end}, U_0, U_{end}$ и количество узлов сетки

$N_Y + 1, N_U + 1$ вводятся произвольно. СПВС строится следующим образом:

выбирается пространственная координата x_* и выбирается момент времени t^*

и вычисляется количество пар $(y_n, U(x_*, y_n, t^*))$,

попавших в (Y_i, U_j) площадку сетки $\omega_{h_Y h_U}$ для всех пространственных координат

$y_n, n = \overline{0, L_y}$ и для всех смоделированных траекторий $k = \overline{1, K}$.

$W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (y_n, U(x_*, y_n, t^*)) \in (Y_i, U_j), n = \overline{0, L_y}, k = \overline{1, K}\}$, где

индексы i и j площадки (Y_i, U_j) сетки $\omega_{h_Y h_U}$ определяются следующим образом:

$i = \left[\frac{y_n - Y_0}{h_Y} \right], j = \left[\frac{U(x_*, y_n, t^*) - U_0}{h_U} \right]$, где $[]$ – целая часть числа.

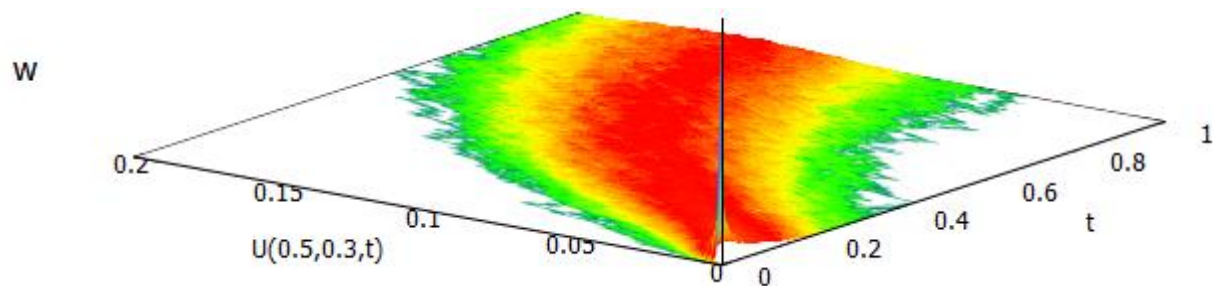
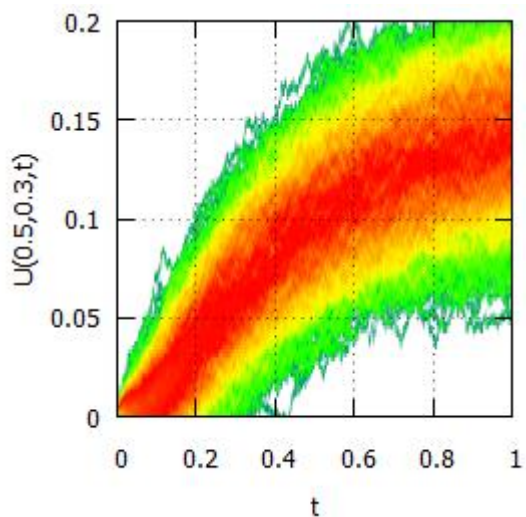
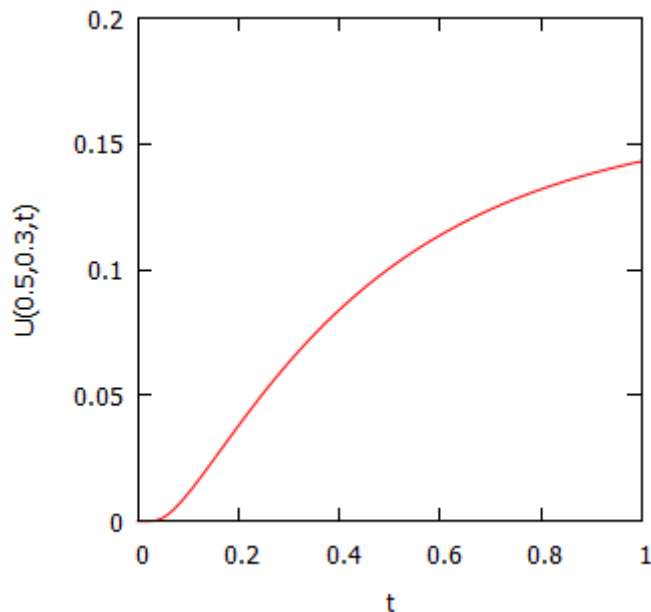
Оценка среднего значения

Выбирается момент времени t^* и вычисляется

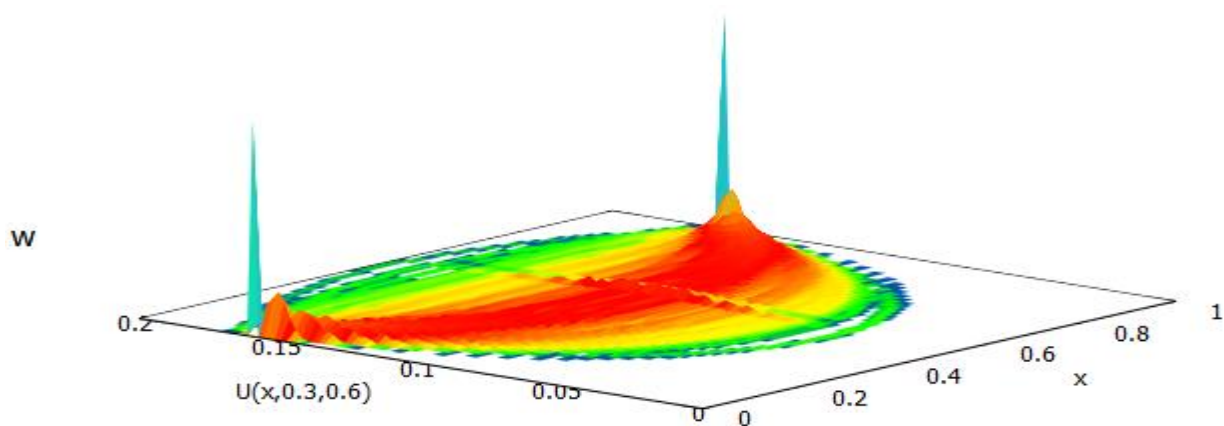
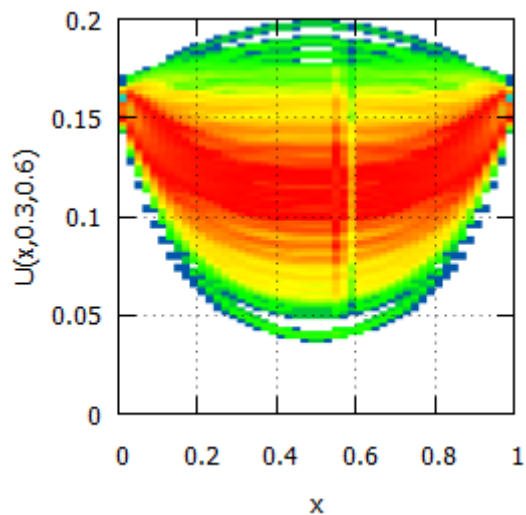
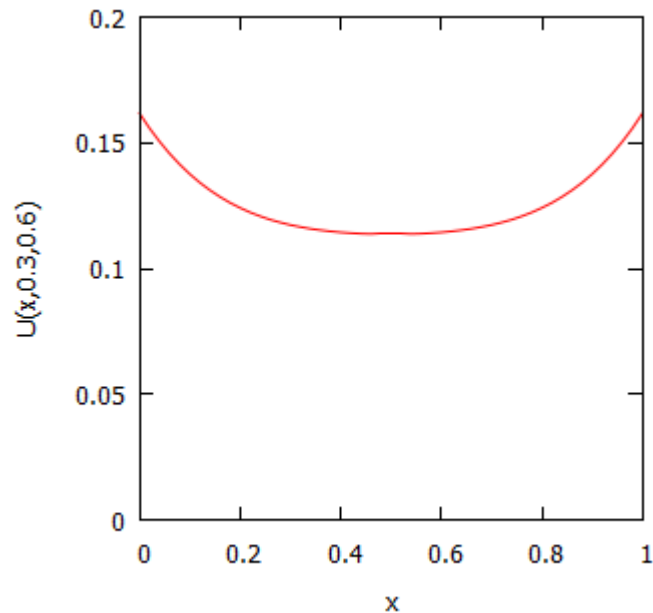
$$\langle U(x_i, y_j, t^*) \rangle = \frac{\sum_{k=1}^K (U(x_i, y_j, t^*))_k}{K}, \quad i = \overline{0, L_x}, \quad j = \overline{0, L_y}, \quad \text{где}$$

$k = \overline{1, K}$ – количество смоделированных траекторий.

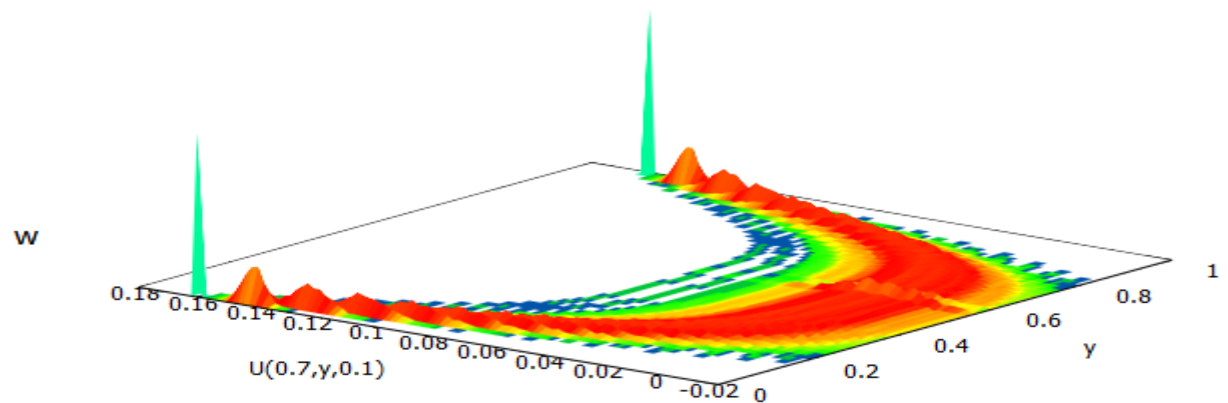
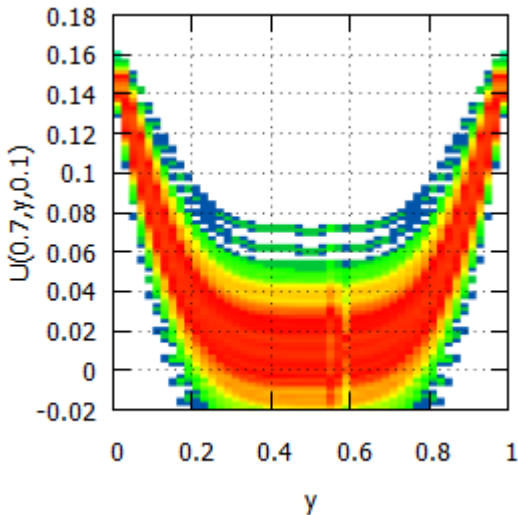
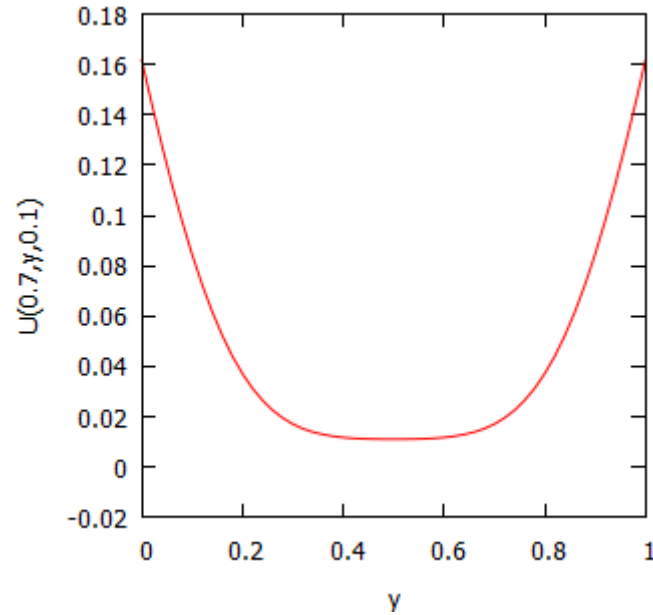
Пространственное сечение и Статистическое пространственное сечение при $x_* = 0.5$ и $y_* = 0.3$



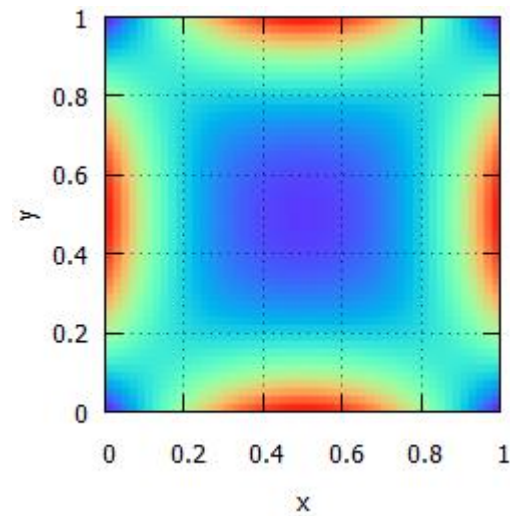
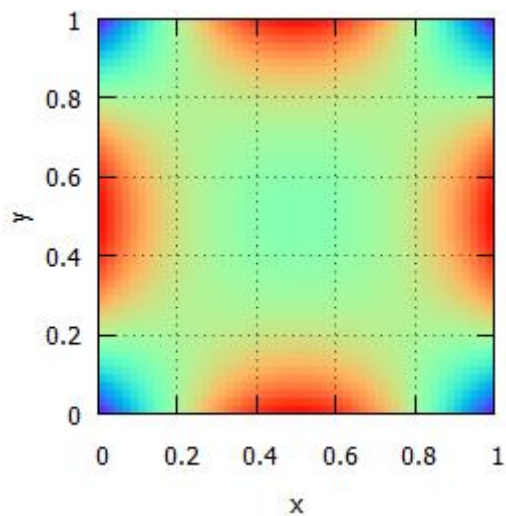
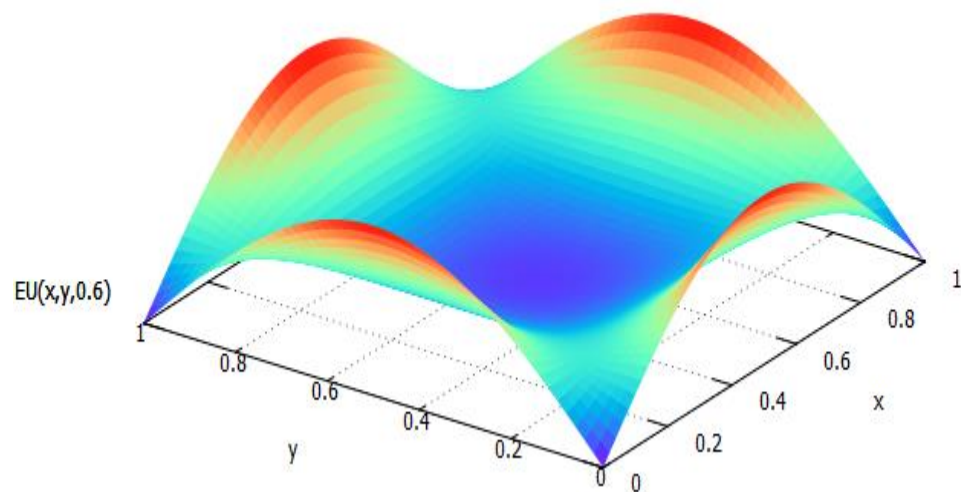
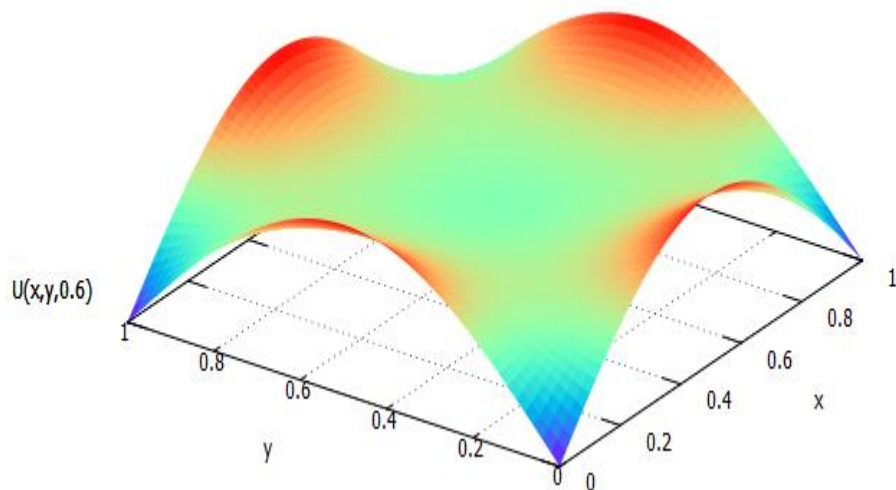
Пространственно-временное сечение и Статистическое пространственно-временное сечение при $y_* = 0.3$ и $t^* = 0.6$ (ось x)



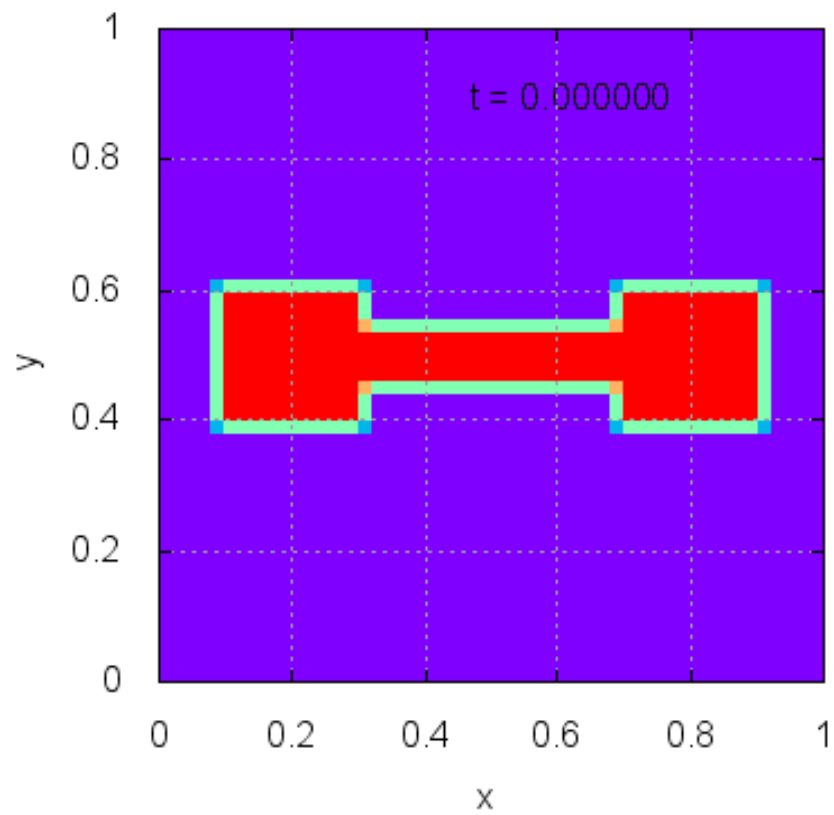
Пространственно-временное сечение и Статистическое пространственно-временное сечение при $x_* = 0.7$ и $t^* = 0.1$ (ось y)



Поле температур и Оценка среднего значения поля температур при $t^* = 0.6$



Анимация



Выводы

Чтобы решать задачи с высокой точностью, необходимо уменьшать шаг интегрирования численного метода и увеличивать количество траекторий, особенно, в задачах с быстро растущей дисперсией. Это на порядки увеличивает время счёта программы, поэтому необходимо использовать параллельные алгоритмы для решения подобных задач на суперкомпьютере. Параллельные алгоритмы реализованы в комплексе программ с удобным пользовательским интерфейсом, что позволяет проводить многосуточные расчёты конкретной задачи на суперкомпьютере.

Спасибо за внимание!