



Обзор летних суперкомпьютерных и астрофизических конференций 2015 года и наш вклад в них

к.ф.-м.н. Куликов И.М.
к.ф.-м.н. Черных И.Г.

3 сентября 2015 г.
Новосибирск

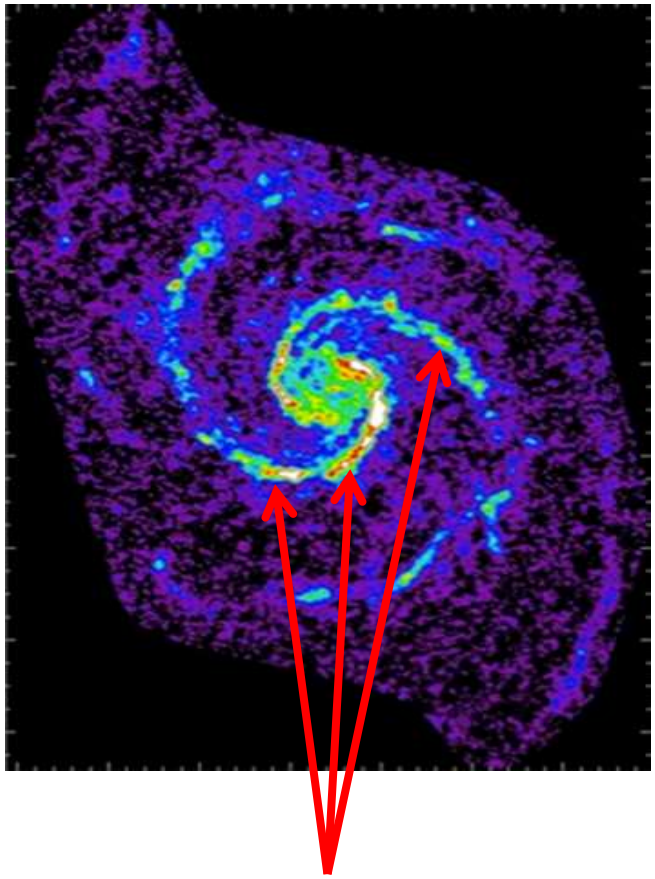
EuroAsia Summer Talk Tour 2015



- Актуальные задачи
- Основные направления и тренды
- Наш вклад в конференцию

Суперкомпьютерное моделирование галактик

Галактика Водоворот М 51



Процесс звездообразования и образования новых элементов вплоть до железа

Наблюдаемые столкновения галактик

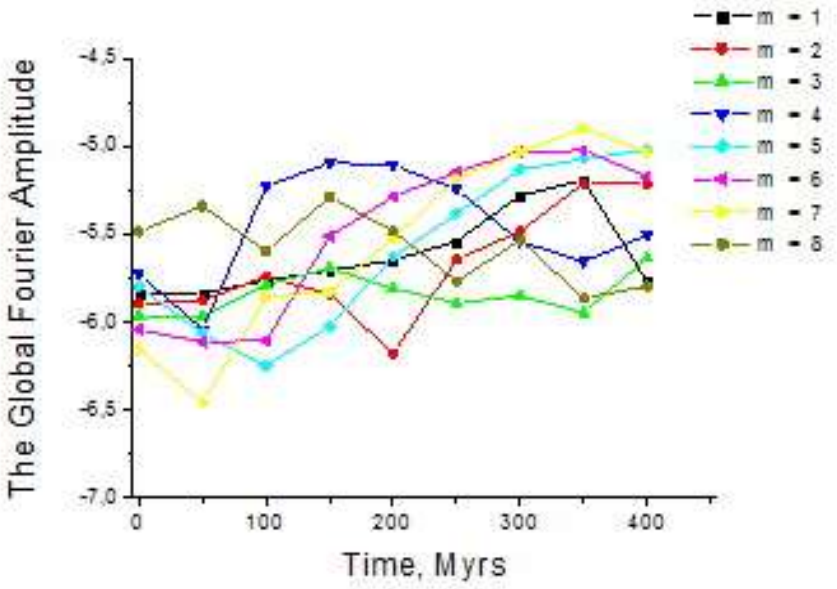


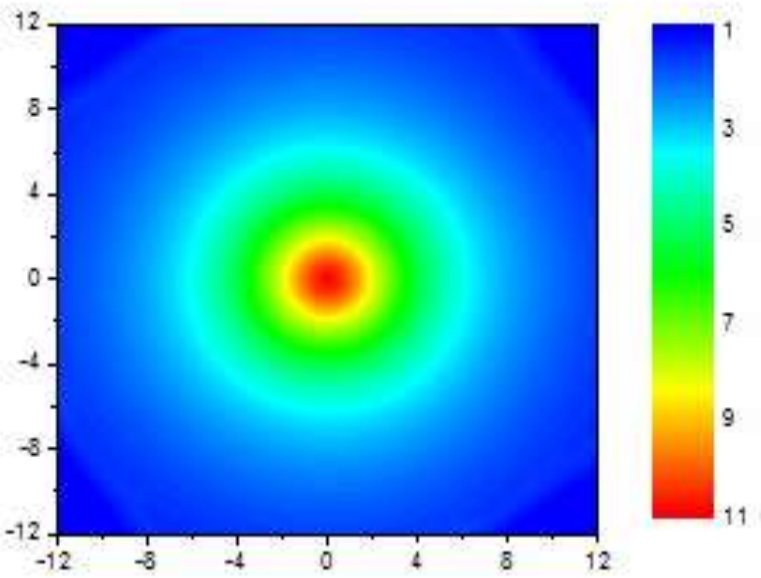
«Движение галактик в плотных скоплениях превращает столкновения между ними в важный эволюционный фактор»

Тутуков А.В.

Подготовка. Шаг первый – спиральные галактики

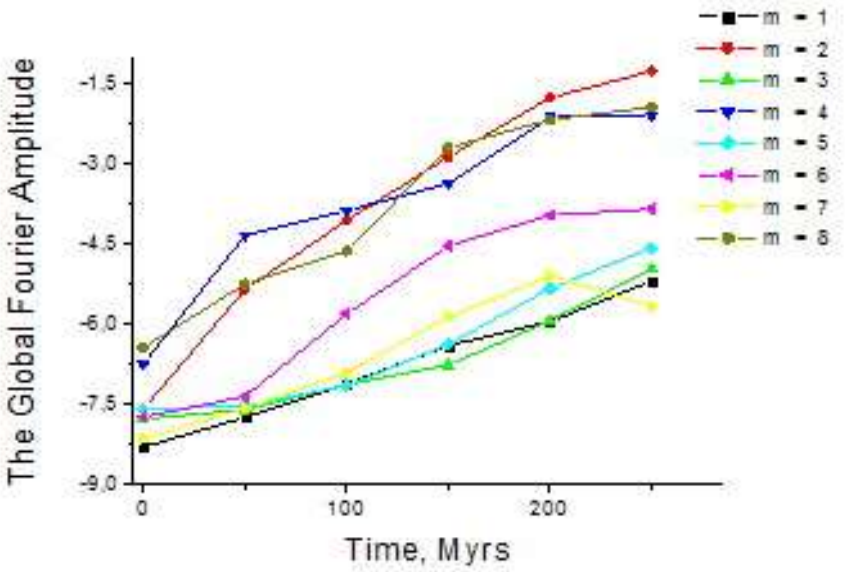
Модель: изотермическая гравитационная газовая динамика
Модель Гало: аналитический NFW-профиль
Профиль диска: равновесная вращающаяся конфигурация
Масса диска: $10^9 M_\odot$
Сценарий: устойчивая конфигурация

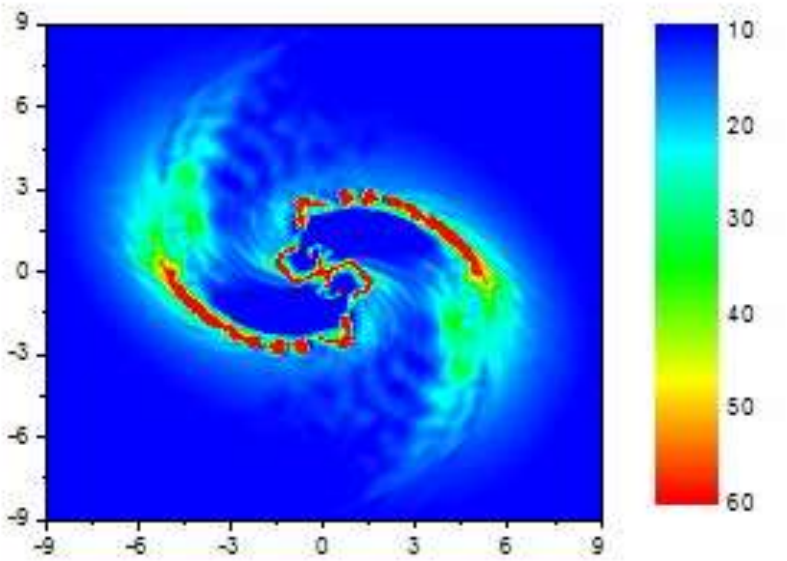




Подготовка. Шаг первый – спиральные галактики

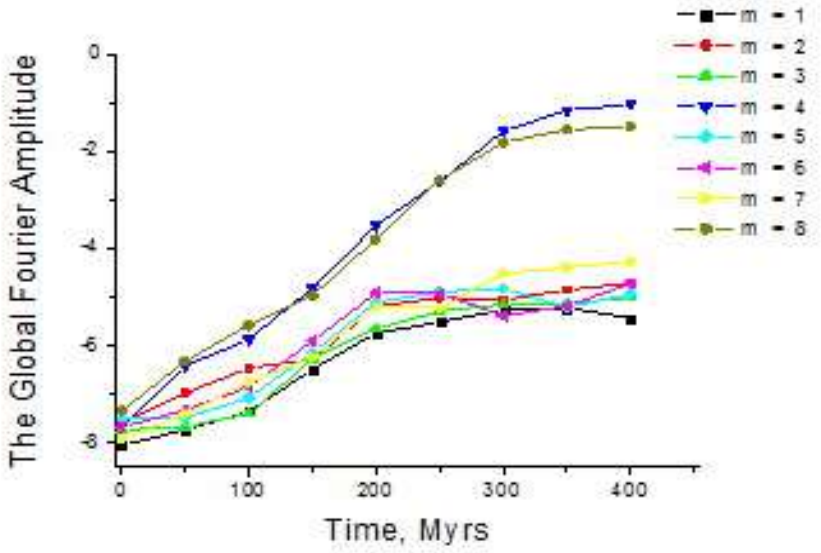
Модель: изотермическая гравитационная газовая динамика
Модель Гало: аналитический NFW-профиль
Профиль диска: равновесная вращающаяся конфигурация
Масса диска: $10^9 M_\odot$
Сценарий: неустойчивость, развитие двух рукавов

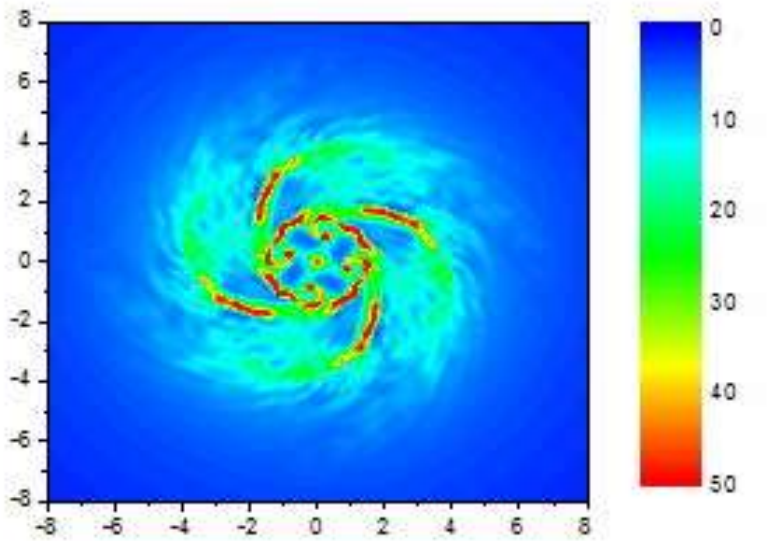




Подготовка. Шаг первый – спиральные галактики

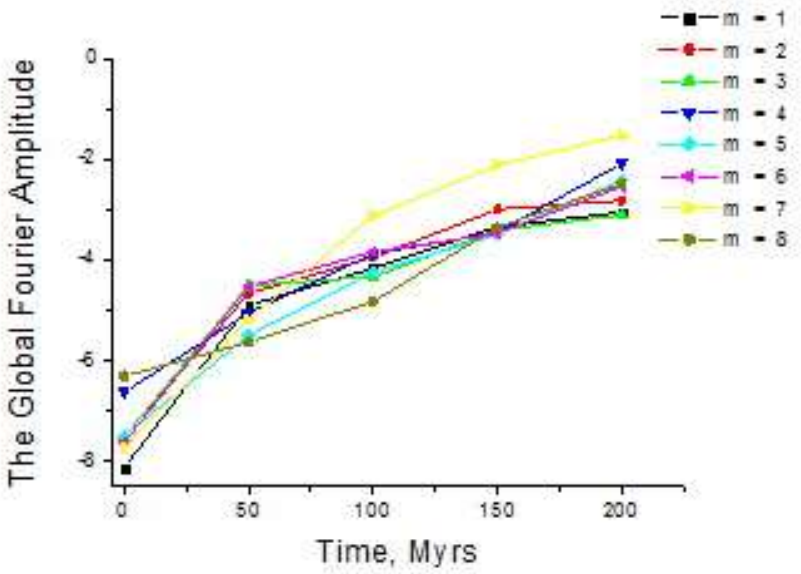
Модель: изотермическая гравитационная газовая динамика
Модель Гало: аналитический NFW-профиль
Профиль диска: равновесная вращающаяся конфигурация
Масса диска: $10^9 M_\odot$
Сценарий: неустойчивость, развитие четырёх рукавов

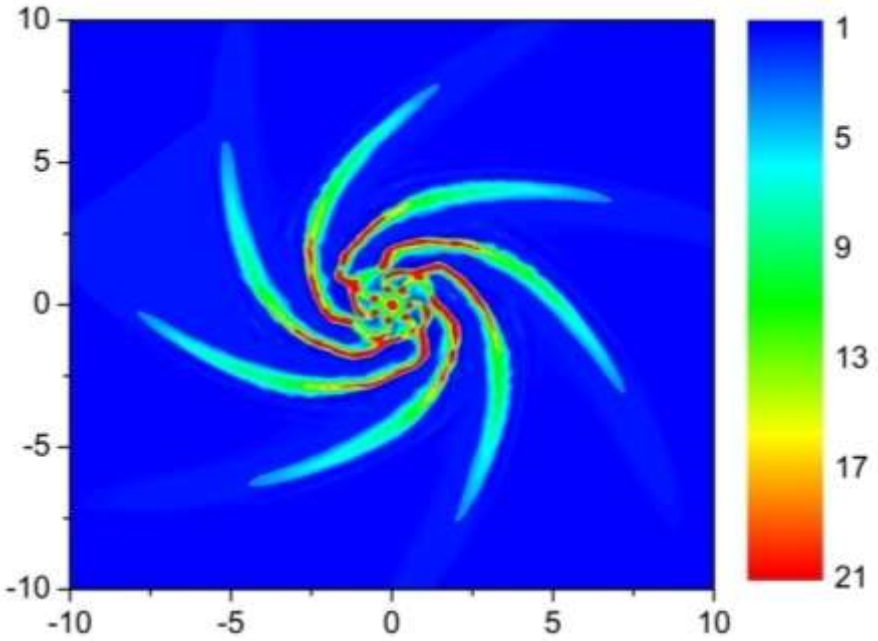




Подготовка. Шаг первый – спиральные галактики

Модель:	**изотермическая гравитационная газовая динамика**
Модель Гало:	**аналитический NFW-профиль**
Профиль диска:	**равновесная вращающаяся конфигурация**
Масса диска:	**10^9 $M_\odot$**
Сценарий:	**неустойчивость, развитие семи рукавов**





Подготовка. Шаг второй – столкновение галактик

Модель: двухфазная модель (газ + звезды/темная материя)

Профиль диска: равновесная вращающаяся конфигурация

Масса галактик: $10^{13}\ M_\odot$

Подсеточная физика: звездообразование, сверхновые; образование H_2, охлаждение / нагревание

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = \mathrm{S} - \mathrm{D}$$

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_H\vec{u}) = -s_{H,H_2} + \mathrm{S}\,\frac{\rho_H}{\rho} - \mathrm{D}\,\frac{\rho_H}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho_{H_2}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{H_2}\vec{u}) = s_{H,H_2} + \mathrm{S}\,\frac{\rho_{H_2}}{\rho} - \mathrm{D}\,\frac{\rho_{H_2}}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho\vec{u}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}\vec{u}) = -\nabla p - \rho\nabla(\Phi) + \vec{v}\,\mathrm{S} - \vec{u}\,\mathrm{D}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho E\vec{u}) = -\nabla\cdot(p\vec{v}) - (\rho\nabla(\Phi),\vec{u}) - \Lambda + \Gamma - \varepsilon\,\frac{\mathrm{D}}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathrm{T}\vec{u}) = -(\gamma-1)\rho\mathrm{T}\nabla\cdot\vec{u} - \Lambda + \Gamma - \varepsilon\,\frac{\mathrm{D}}{\rho}$$

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho\vec{u}^{\,2} + \rho\varepsilon \qquad p = (\gamma-1)\rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\vec{v}) = \mathrm{D} - \mathrm{S}$$

$$\frac{\partial n\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(n\vec{v}\vec{v}) = -\nabla\Pi - n\nabla(\Phi) + \vec{u}\,\mathrm{D} - \vec{v}\,\mathrm{S}$$

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho W\vec{v}) = -\nabla\cdot(\Pi\vec{v}) - (n\nabla(\Phi),\vec{v}) - \Gamma + \varepsilon\,\frac{\mathrm{D}}{\rho}$$

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\xi}}{\partial t} + \nabla\cdot(\Pi_{\xi\xi}\vec{v}) = -2\Pi\nabla\cdot\vec{u} - \Gamma + \varepsilon\,\frac{\mathrm{D}}{3\rho}$$

$$\rho W = \frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2} + \frac{\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}}{2}$$

$$\Delta\Phi = 4\pi G(\rho + n)$$

Подготовка. Шаг второй – столкновение галактик

Образование H_2 (*Khoperskov et al., 2013; Glover & Mac Low, 2007*)

$$\frac{dn_{H_2}}{dt} = R_{gr}(T) n_H (n_H + 2n_{H_2}) - \left(\xi_H + \xi_{diss}(N_{H_2}, A_V)\right) n_{H_2}$$

Звездообразование (*Katz et al., 1996*)

$$T < 10^4 K \qquad " \cdot \vec{u} < 0 \qquad \rho > 1.64 \frac{M_\odot}{pc^{-3}}$$

$$\mathrm{D} = \mathrm{C}\rho^{3/2}\sqrt{\frac{32G}{3\pi}}$$

Функция охлаждения (*Sutherland & Dopita, 1993*)

$$\Lambda \sim 10^{-22} n_H^2 cm^{-3} erg$$

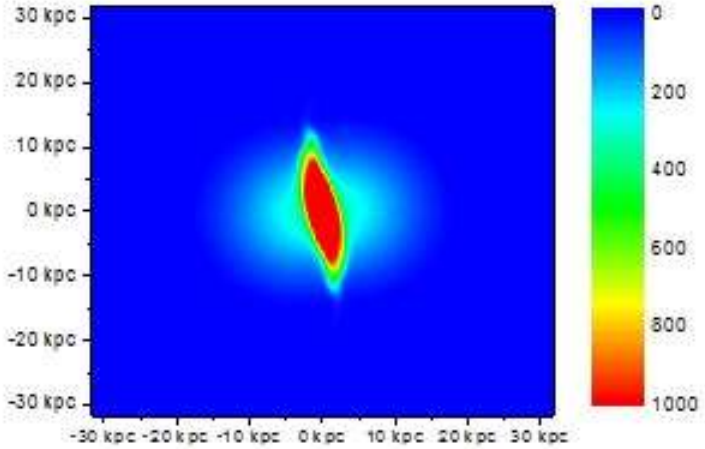
Сверхновые + нагревание (*Springel & Hernquist, 2003*)

$$\mathrm{S} = \beta \mathrm{C} n^{3/2}\sqrt{\frac{32G}{3\pi}}$$

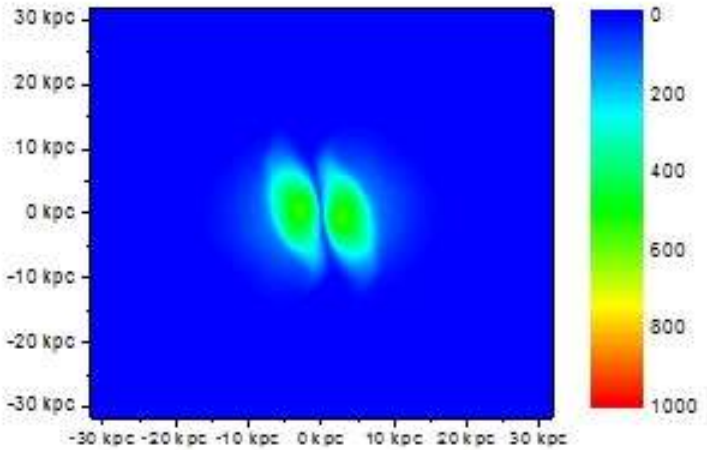
$$\Gamma = 10^{51}\frac{M^{SN}}{M_\odot} erg$$

Подготовка. Шаг второй – столкновение галактик

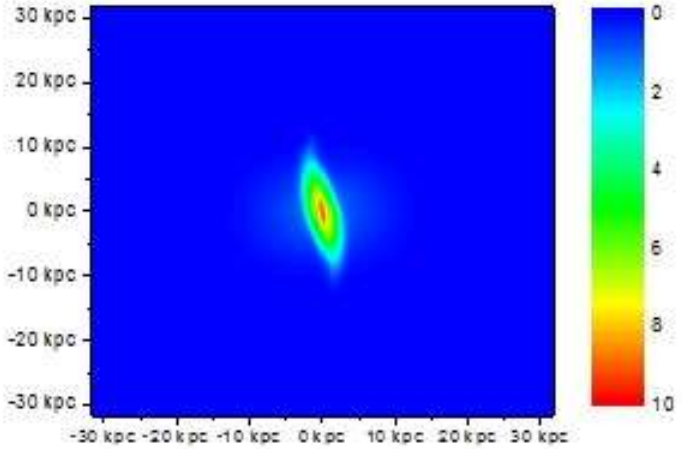
Водород



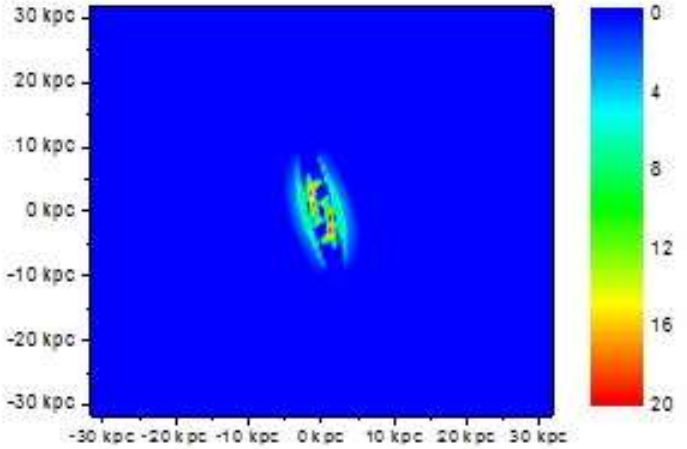
Звезды и темная материя



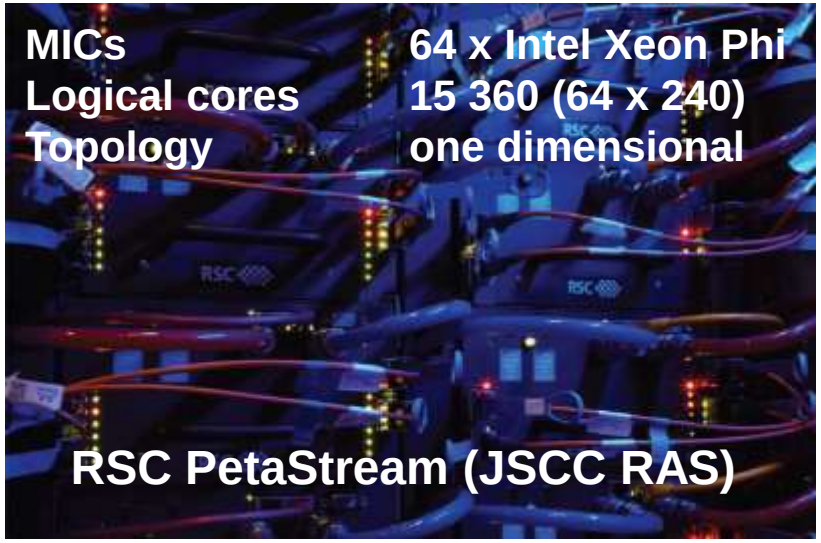
Молекулярный водород

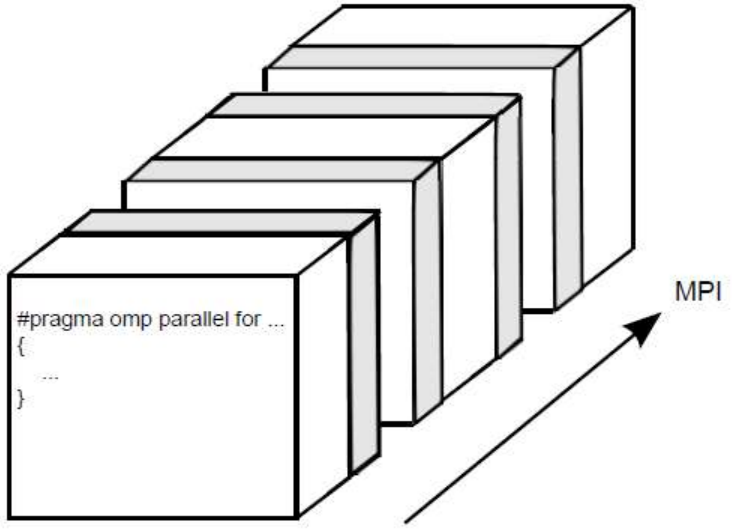


Скорость звездообразования



Подготовка. Шаг третий – параллельная реализация





1. The speed-up factors of 134 on 260 logical cores
2. The efficiency of 92% on 64 MICs (or on 15 360 cores)
3. The 29 GFLOPS of scalar performance (or 40% from peak)

The simulation of behavior of parallel implementation on
983 040 cores
by means AGNES* system the
80% efficiency
was shown

* Weins 2015, Podkorytov et al., LNCS 2010

Подготовка. Шаг четвертый – численный метод

- **Высокий порядок точности (малая диссипация на разрывных решениях) численного метода**
- **Отсутствие искуственной вязкости и лимитеров**
- **Инвариантность относительно поворота**
- **Гарантия неубывания энтропии**
- **Регулярная процедура обобщения на другие модели (*уравнения Больцмана и МГД уравнения*)**
- **Простота параллельной реализации**
- **Потенциально бесконечная масштабируемость**

Сиб IT Форум 2015

Кашковский А. ИТПМ СО РАН
Решение кинетического уравнения Больцмана.

1 GPU = 40 CPU Cores

Караваев Д. ИВМиМГ СО РАН
Решение задач теории упругости

1 Intel Xeon Phi = 7,7 CPU Cores
1 GPU = 50 CPU cores

Куликов И. ИВМиМГ СО РАН
Решение астрофизических задач

1 Intel Xeon Phi = 30 GFLOPS

Киреев С. ИВМиМГ СО РАН
Решение задач теории упругости

1 Intel Xeon Phi = 8 CPU Cores

Снытников А.
Физика плазмы

1 GPU = 32 CPU Cores

IEEE CCGRID 2015

- Энергоэффективность вычислений (*стоимость в долларах электричества для решения задачи*)
- Разработка нового стандарта MPI для облачных вычислений
- Разработка новых систем параллельного ввода/вывода
- Использование ускорителей и специализированных устройств
- Поддержка технологий вложенных сеток на уровне низкоуровневого программного интерфейса
- Обработка больших данных из социальных сетей (*для решения задач используются алгоритмы распознавания генома*)
- Различные модели параллельных вычислений
- Разработка очередей задач
- Решение биологических задач методом молекулярной динамики

AstroNum 2015



Состав участников:

Аспиранты	2
Учёные со степенью	68
профессоров	50
Всего	**70**

Некоторые участники конференции:

N. Pogorelov	A. Mignone
D. Balsara	S. Li
G. Zank	R. Keppens
P. Collela	M. Mac Low
D. Bisikalo	V. Izmodenov
E. Audit	G. Toth

География участников:

Южная Америка	0
Северная Америка	33
Европа	30
Россия	3
Азия	5
Африка/Океания	2

Основные темы конференции

- Задача взрыва сверхновых звезд (*подробнее на ISC*)
- Взаимодействие солнечного ветра с кометами, планетами, молекулярными облаками и галактиками
- Многослойные решатели высокого порядка для МГД уравнений
- Моделирование МГД эволюции молекулярных облаков
- Решатели для уравнений релятивистской гидродинамики
- Различные модели subgrid физики (для разных масштабов)

Конференция памяти М.С. Иванова

The disadvantages of N-body model

- a spurious generation of entropy
- a problem of choice of the kernel function in cell
- a necessary minimal number of particles in cell
- increased communication overhead
- poor load balancing
- a thermodynamically unconsistent of star formation

The hydrodynamic alternative

- The pressureless hydrodynamic
- The collisionless hydrodynamic*

* Mitchell, Vorobyov, Hensler, MNRAS, 2013

Конференция памяти М.С. Иванова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0$$

$$d^3v = dv_x dv_y dv_z$$

$$\rho = \int m f d^3v$$

$$u = \rho^{-1} \int m f v d^3v$$

$$\sigma_{ij}^2 = \rho^{-1} \int m f \left(v_i - u_i\right)\left(v_j - u_j\right) d^3v = \sigma_{ji}^2$$

- It is important to movement of the cluster and not single particle
- No thermal transfer effects (***the property of almost all the astrophysical problems***)
- The velocity dispersion is much less than the velocity squared

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho u\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho u u\right) = -\nabla\left(\rho \sigma^2\right) - \rho \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \rho E_{ij}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho E_{ij} u\right) = -\nabla \cdot \left(2\rho \sigma_{ij}^2 u\right) - 2\left(\rho u, \nabla \Phi\right)$$

$$\rho E_{ij} = \rho \sigma_{ij}^2 + \rho u_i u_j$$

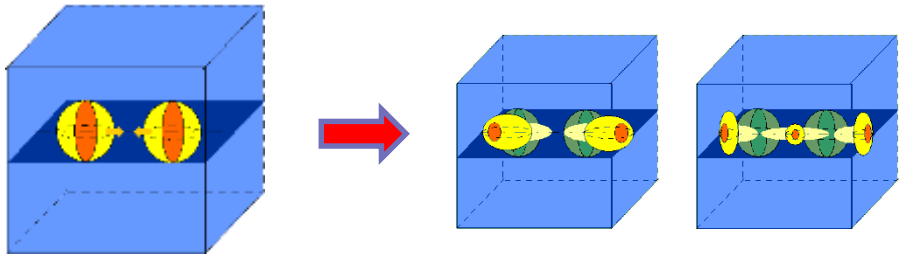
Конференция памяти М.С. Иванова

The advantages of collisionless hydrodynamic

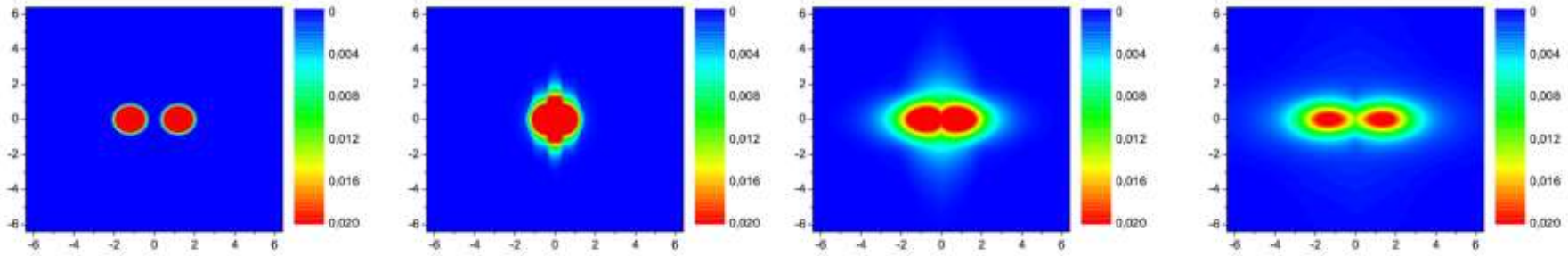
- a thermodynamically consistent of star formation
- one numerical method for gaseous and stellar components

The disadvantages of collisionless hydrodynamic

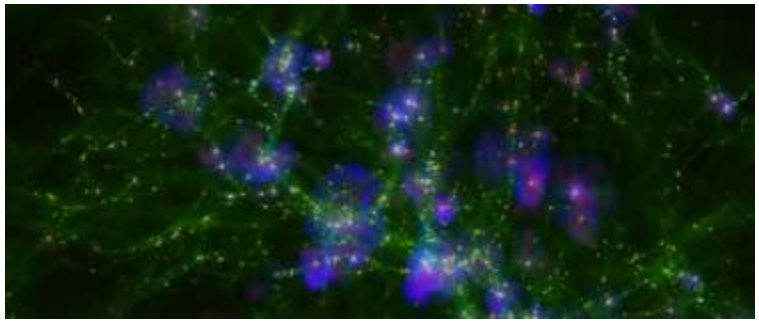
- The applicability of the approach in each a specific problem



Kulikov, ApJS, 2014



10th Cosmology Conference





Состав участников:

Аспиранты	40
Учёные со степенью	60
профессоров	35
Всего	**100**

География участников:

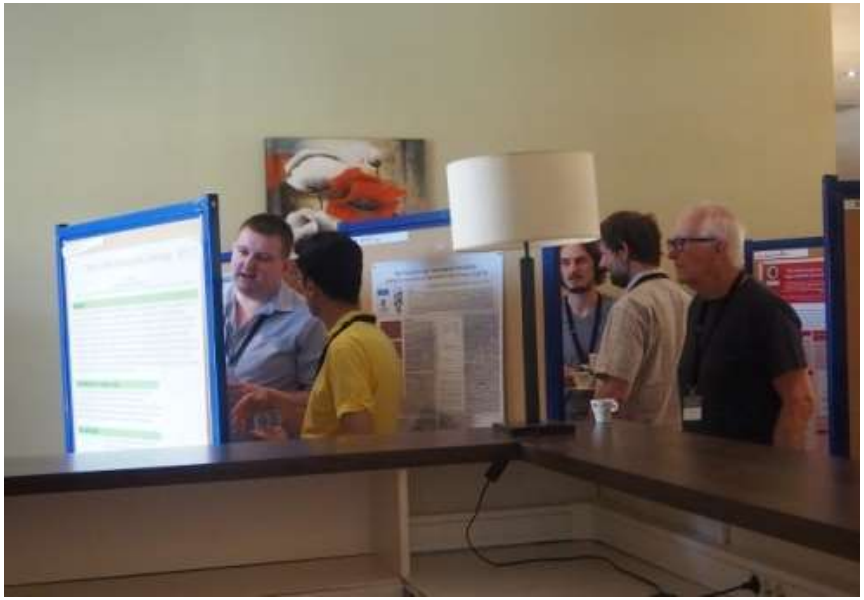
Южная Америка	5
Северная Америка	40
Европа	35
Россия	2
Азия	10
Африка/Океания	10

10th Cosmology Conference









Основные темы конференции

- Наблюдаемые морфологические свойства скоплений галактик и отдельных галактик (масса, профиль плотности, вращения и т.п.)
- Космологическое гидродинамическое моделирование

  (**EAGLE, CLUES и ILLUSTRIS проекты**)
- Космологическое N-body моделирование (**Horizon проект**)
- Усложнение модели subgrid физики
  - Моделирование процесса звездообразования
  - Моделирование образования черных дыр
  - **Моделирование химических реакций**
- Новые математические модели и параллельные численные методы для решения космологических задач
- Проекты по наблюдениям ALMA, ELT и LSST

ISC 2015

ISC High Performance
The HPC Event.



Состав участников:

Доклады	400
Россия	4
ИВМиМГ СО РАН	1
ОИВТ РАН	1
МГУ	2
Выставка	153
Всего	**2 846**



Основные темы конференции

- Новые архитектуры суперЭВМ на парадигме «памяти-фабрики» (*одна большая память и агенты-вычислители*)
- Проект экзафлопсной суперЭВМ **Horizon 2020** (*прогнозируется создание первой европейской суперЭВМ в 2020 году*)
- Концепция со-дизайна программного обеспечения для экзафлопсных суперЭВМ (*примерно наша идеология*)
- Создание Urban OS (*операционная система для управления инфраструктурой города*)
- Визуальные языки программирования для биологии (*в основе находится молекулярная динамика*)
- Энергоэффективность алгоритма (*стоимость в долларах электричества для решения задачи*)

Основные темы конференции

- Обработка больших данных из социальных сетей (*для решения задач используются алгоритмы распознавания генома*)
- Вопросы кибербезопасности от систем управления промышленными объектами (*проблема Ирана*) до мобильных телефонов (*прослушивание телефонных переговоров*)
- Квантовые вычисления (*вычислительная система доведена до работы в комнате и в комнатной температуре, максимальная задача – скалярное произведение*)
- Моделирование работы мозга (*организация облачных вычислений*)
- Моделирование сверхновых (*две из трёх астрофизических задач на конференции*)
- Моделирование материалов и нагрузок (*от моделей молекулярной динамики до сплошной среды*)

Лидерство Tianhe-2

США решили опередить Китай в построении экзафлопного суперкомпьютера



Obama orders effort to build first exascale computer

Tweet 45 Share 184 G+1 9



By Robert F. Service | 30 July 2015 5:15 pm | 7 Comments

Staff Writer

The United States is now committed to building an exascale computer, some 30 times more powerful than today's top machine. Yesterday, President Barack Obama signed an executive order creating a national strategic computing initiative, which aims to coordinate high-performance computing research and development between federal agencies. The order should make it easier for agencies to justify increasing their budget requests to Congress for supercomputing R&D.

Advancing U.S. Leadership ×

https://www.whitehouse.gov/blog/2015/07/29/advancing-us-leadership-high-performance-computing

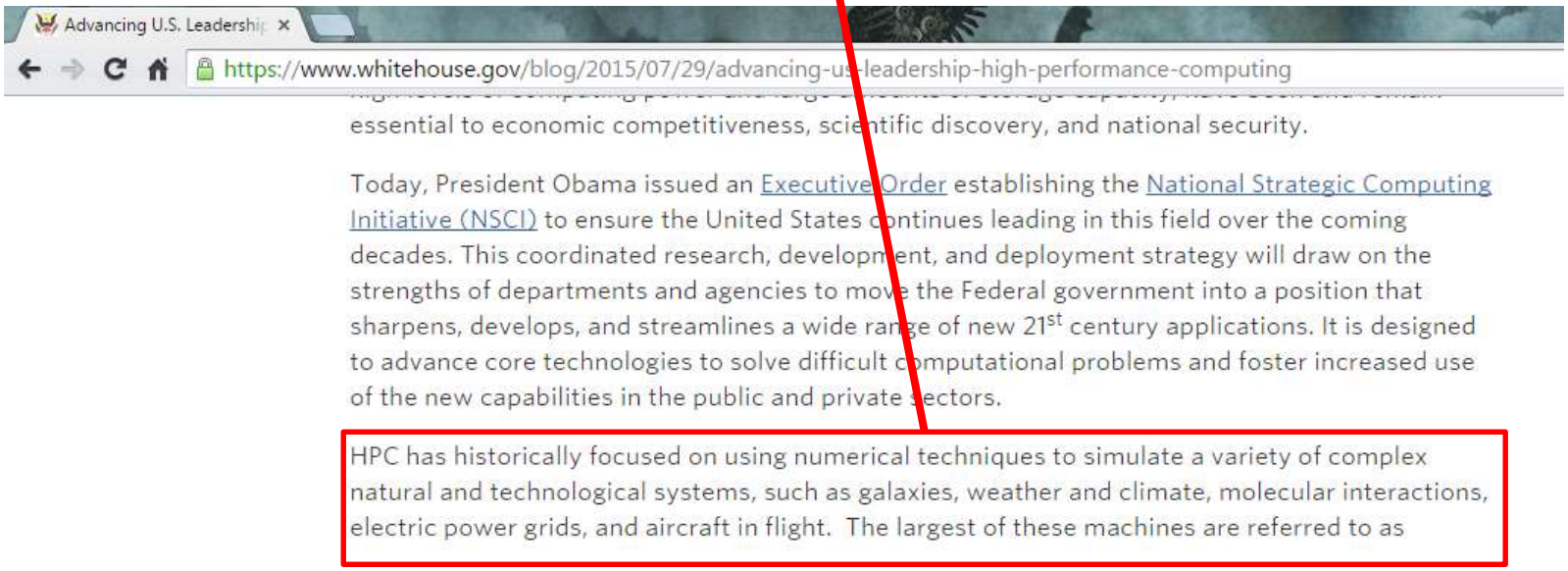
essential to economic competitiveness, scientific discovery, and national security.

Today, President Obama issued an Executive Order establishing the National Strategic Computing Initiative (NSCI) to ensure the United States continues leading in this field over the coming decades. This coordinated research, development, and deployment strategy will draw on the strengths of departments and agencies to move the Federal government into a position that sharpens, develops, and streamlines a wide range of new 21st century applications. It is designed to advance core technologies to solve difficult computational problems and foster increased use of the new capabilities in the public and private sectors.

HPC has historically focused on using numerical techniques to simulate a variety of complex natural and technological systems, such as galaxies, weather and climate, molecular interactions, electric power grids, and aircraft in flight. The largest of these machines are referred to as

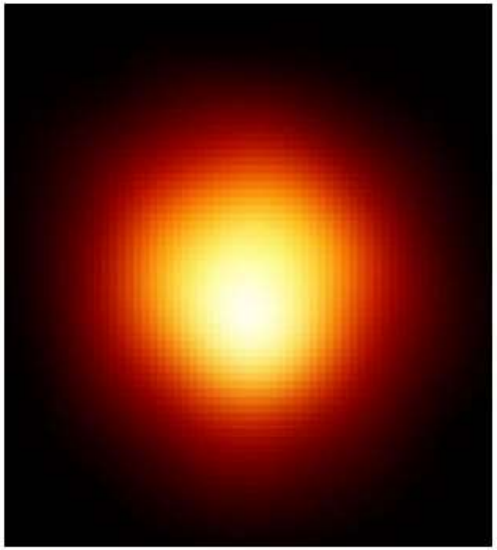
Лидерство Tianhe-2

HPC has historically focused on using numerical techniques to simulate a variety of complex natural and technological systems, such as galaxies, weather and climate, molecular interactions, electric power grids, and aircraft in flight. The largest of these machines are referred to as

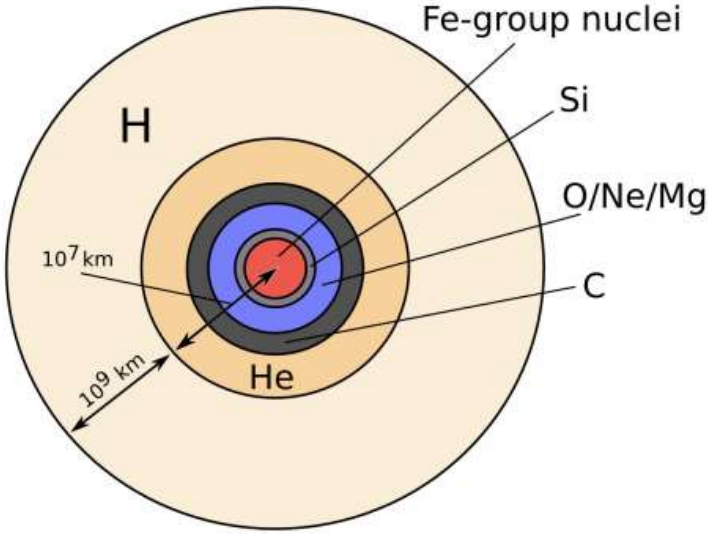


Моделирование сверхновых звезд
H.T. Janka (MPIA), C. Ott (CalTech)

Example: Stellar Core Collapse & Supernova Explosions



Red Supergiant Betelgeuse
credit: NASA/HST



Multi-Scale:

~10^9 km	–	stellar radius
~2000 km	–	collapsing core
~15 km	–	radius of neutron star

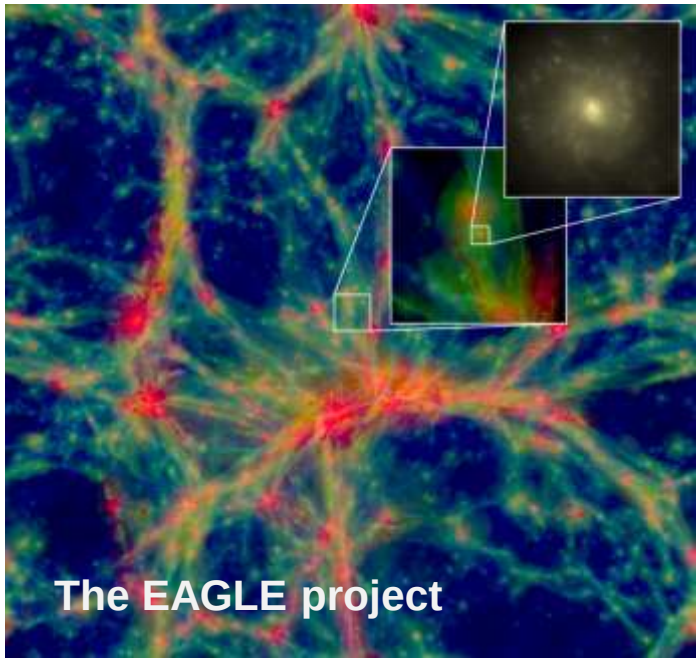
Результаты конференций

- Моделирование столкновения скоплений галактик и галактик в космологическом контексте (*от крупномасштабных структур до отдельных галактик*)
- Глобальное МГД моделирование взаимодействия солнечного ветра с кометами, естественными спутниками и планетами (*движение галактик через межгалактический газ*)
- Взрыв сверхновой с химокинетикой (*178 химических и ядерных реакций*) в газодинамической и в модели релятивистской гидродинамики

Интерес на конференциях к нам

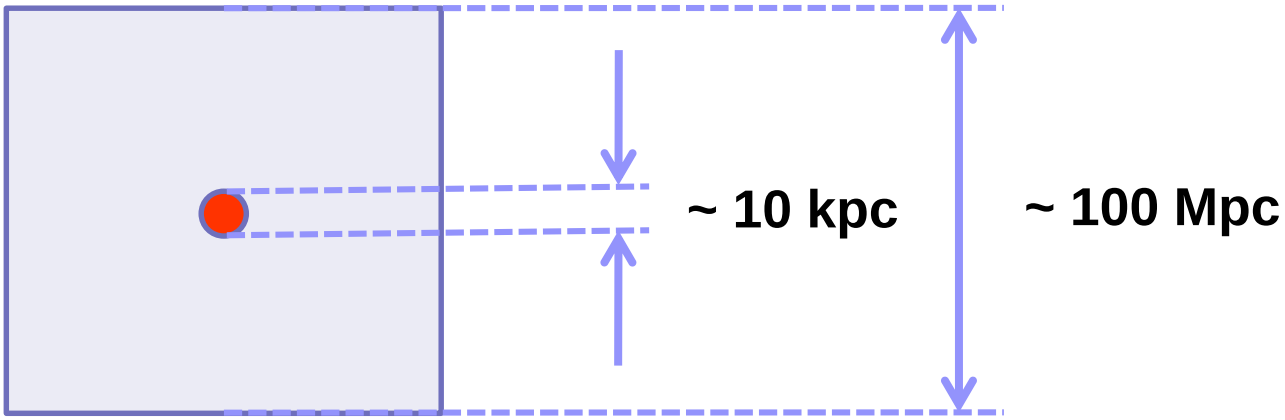
- Реализация параллельных вычислений (40 %)
- Использование ускорителей Intel Xeon Phi (20 %)
- Математические модели (5 %)
- Численные методы решения (30 %)
- Решаемые задачи (5 %)

Космологическое моделирование



Процессы:

- Охлаждение/нагревание
- Звездообразование
- Эффект взрыва supernova
- Химические реакции



Космологическое моделирование

Гидродинамика

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho_i \vec{u}) = s_i$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\frac{1}{a}\nabla p - \frac{a'}{a}\rho \vec{u} - \frac{\rho}{a^2}\nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \varepsilon \vec{u}) = -\frac{1}{a}(\gamma - 1)\rho \varepsilon \nabla \cdot (\vec{u}) - 2\frac{a'}{a}\rho \varepsilon + \Gamma - \Lambda$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho E \vec{u}) = -\frac{1}{a}\nabla \cdot (p\vec{u}) - 2\frac{a'}{a}\rho E - \frac{1}{a^2}(\rho \vec{u}, \nabla \Phi) + \Gamma - \Lambda$$

Расширение по закону Хаббла

$$\frac{da}{dt} = H\sqrt{\Omega_M \left(a^{-1} - 1\right) + \Omega_\Lambda \left(a^2 - 1\right) + 1}$$

Космологическое моделирование

Бесстолкновительная компонента (звезды и темная материя)

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(n\vec{v}\right)=0$$

$$\frac{\partial n\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(n\vec{v}\vec{v}\right)=-\frac{1}{a}\nabla\cdot(\Pi)-\frac{a'}{a}n\vec{v}-\frac{n}{a^2}\nabla\Phi$$

$$\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(\Pi_{xx}\vec{v}\right)=-\frac{2}{a}\Pi_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}-2\frac{a'}{a}\Pi_{xx}$$

$$\frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(\Pi_{yy}\vec{v}\right)=-\frac{2}{a}\Pi_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}-2\frac{a'}{a}\Pi_{yy}$$

$$\frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(\Pi_{zz}\vec{v}\right)=-\frac{2}{a}\Pi_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}-2\frac{a'}{a}\Pi_{zz}$$

$$\frac{\partial nW}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(nW\vec{v}\right)=-\frac{1}{a}\nabla\cdot\left(\Pi\vec{v}\right)-2\frac{a'}{a}nW-\frac{1}{a^2}\left(n\vec{v},\nabla\Phi\right)$$

$$\Delta\Phi=4\pi G\left(\left(\rho+n\right)-\left(\rho+n\right)_0\right)$$

Космологическое моделирование

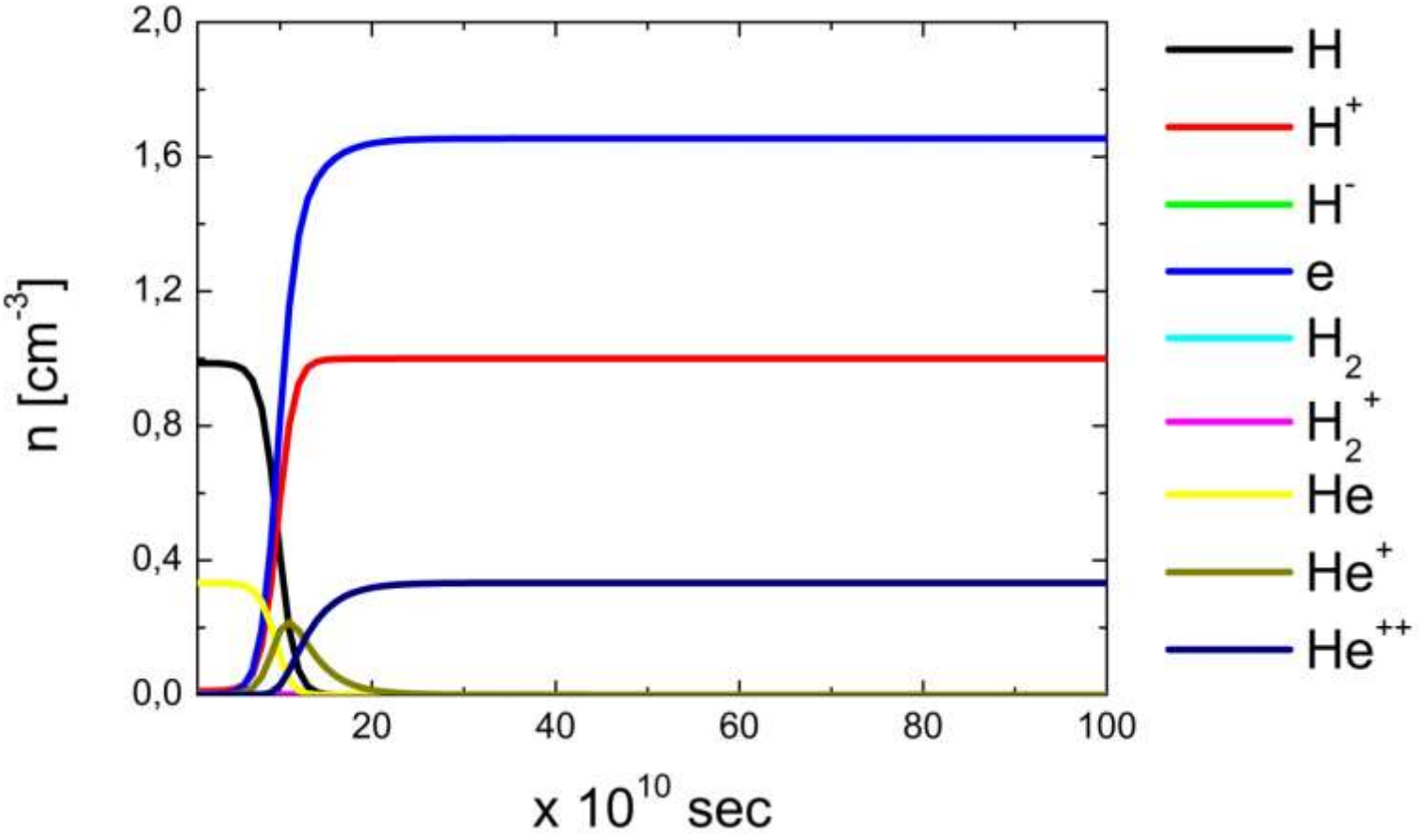
Химические реакции

$$H + e \rightarrow H^+ + 2e$$
$$H + e \rightarrow H^- + \gamma$$
$$H + H^+ \rightarrow H_2^+ + \gamma$$
$$H_2 + H^+ \rightarrow H_2^+ + H$$
$$H^- + e \rightarrow H + 2e$$
$$H^- + H^+ \rightarrow 2H + \gamma$$
$$H_2^+ + e \rightarrow 2H + \gamma$$
$$3H \rightarrow H_2 + H$$
$$He + e \rightarrow He^+ + 2e$$
$$He^+ + e \rightarrow He^{++} + 2e$$

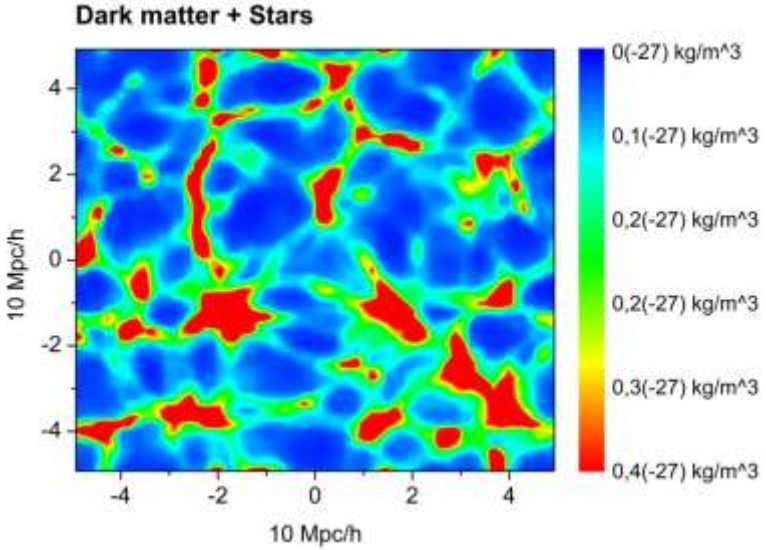
$$H^+ + e \rightarrow H + \gamma$$
$$H^- + H \rightarrow H_2 + e$$
$$H_2^+ + H \rightarrow H_2 + H^+$$
$$H_2 + e \rightarrow 2H + e$$
$$H^- + H \rightarrow 2H + e$$
$$H^- + H^+ \rightarrow H_2^+ + e$$
$$H_2^+ + H^- \rightarrow H + H_2$$
$$H_2 + H \rightarrow 3H$$
$$He^+ + e \rightarrow He + \gamma$$
$$He^{++} + e \rightarrow He^+ + \gamma$$

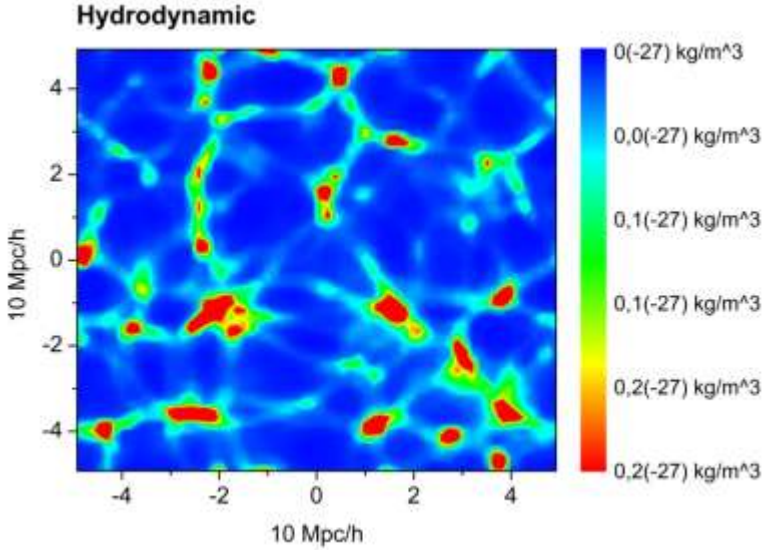
Космологическое моделирование

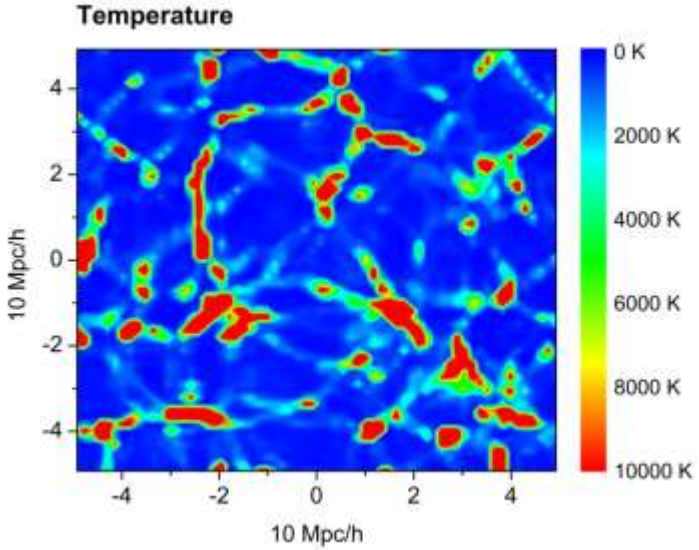
Химические реакции



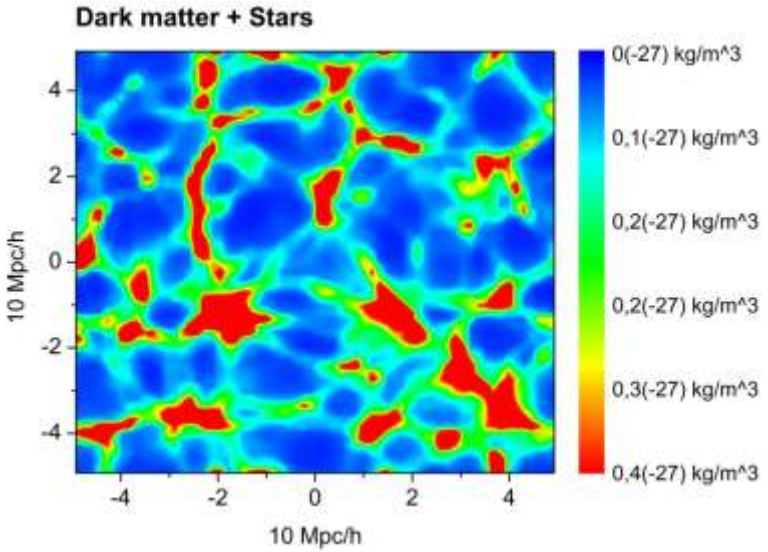
Космологическое моделирование

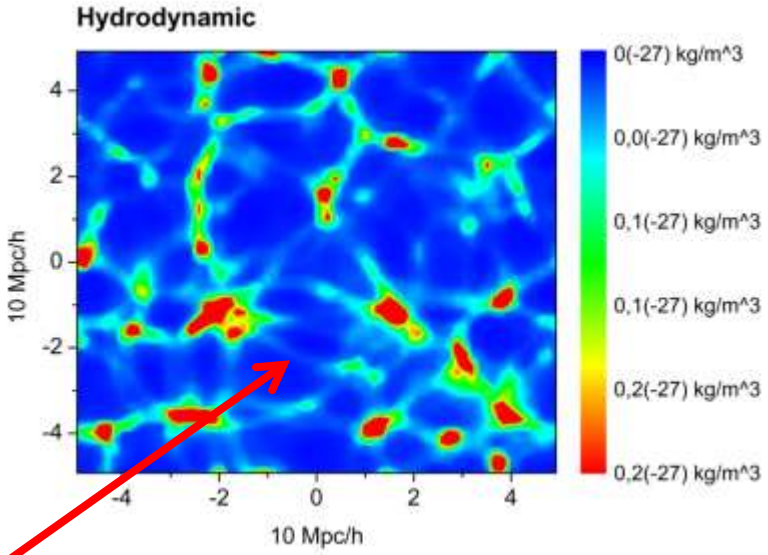


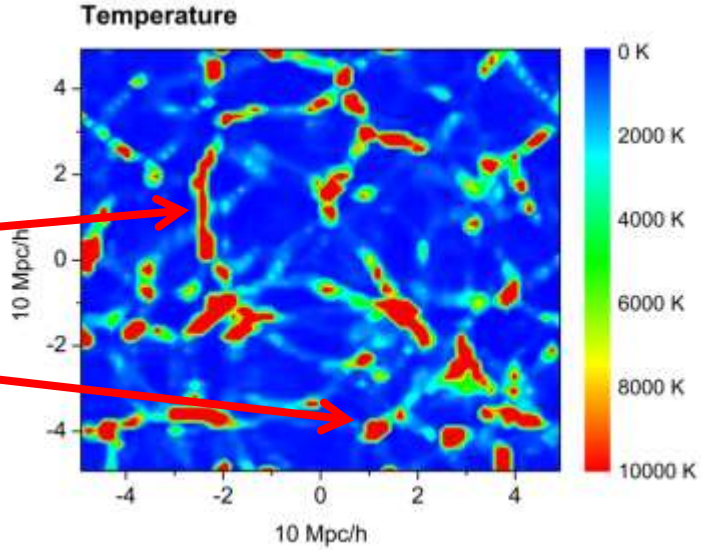




Космологическое моделирование







filaments $\lambda_1 \square \lambda_2 \square \lambda_3$

walls (pancake) $\lambda_1 \square \lambda_2 \square \lambda_3$

cluster $\lambda_1 \square \lambda_2 \square \lambda_3$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\left(p v_x\right)}{\partial x}=-(\gamma-1)\, p\,\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_y v_x-B_y B_x\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial\left(B_y v_x-B_x v_y\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_z v_x-B_z B_x\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial\left(B_z v_x-B_x v_z\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_x^2-B_x^2\right)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\left(\rho E+p+\frac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2}\right)v_x-B_x\left(\vec{v},\vec{B}\right)\right)}{\partial x}=0$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\left(p v_x\right)}{\partial x}=-(\gamma-1)\, p\,\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_y v_x-B_y B_x\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial\left(B_y v_x-B_x v_y\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_z v_x-B_z B_x\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial\left(B_z v_x-B_x v_z\right)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_x^2-B_x^2\right)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\left(\rho E+p+\frac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2}\right)v_x-B_x\left(\vec{v},\vec{B}\right)\right)}{\partial x}=0$$

Краткое описание численного метода

$$\frac{\partial \square}{\partial t} + \nabla \square (\square \cdot \vec{v}) = \Im(\square, \nabla \square)$$

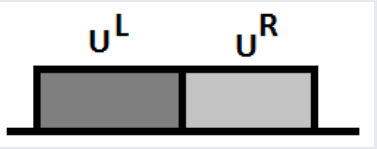
(1)

$$\frac{\partial \square}{\partial t} = \Im(\square, \nabla \square)$$

(2)

$$\frac{\partial \square}{\partial t} + \nabla \square (\square \cdot \vec{v}) = 0$$

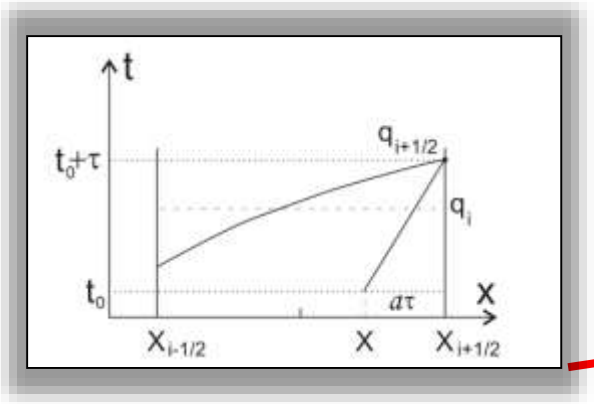
Задача Римана



$$\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad B = R\Lambda L \qquad LR = I$$

$$L\frac{\partial u}{\partial t} + LR\Lambda L\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad w = Lu$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad w(x,t) = w(x - \Lambda t) \qquad u = Rw$$



Кусочно-параболические функции

(*) Kulikov, et al., LNCS, 2009; APJS, 2011, 2014; AAABS, 2013; CPC 2015; NewA 2016

(**) Ustyugov, Popov, Comp. Math. & Math. Phys., 2007, 2008, Comp. Phys., 2009

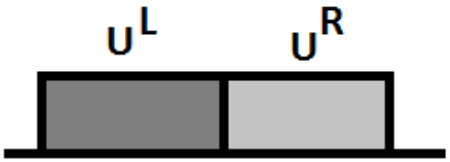
Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений
Эйлеров этап

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ B_y & -B_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & 0 \\ \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} = 0$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Осреднение величин.

$$\rho = \frac{\rho^L \sqrt{\rho^L} + \rho^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \qquad p = \frac{p^L \sqrt{\rho^L} + p^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}$$

$$v_{[x,y,z]} = \frac{v^L_{[x,y,z]} \sqrt{\rho^L} + v^R_{[x,y,z]} \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}$$



$$B_{[x,y]} = \frac{B^R_{[y,z]} \sqrt{\rho^L} + B^L_{[y,z]} \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Скорости волн

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad c_{f,s} = \sqrt{\frac{\left(c^2 + b^2\right) \pm \sqrt{\left(c^2 + b^2\right)^2 - 4c^2 c_a^2}}{2}} \qquad c_a = \left|b_x\right| = \left|\frac{B_x}{\sqrt{\rho}}\right|$$

$$\left(\alpha_f, \alpha_s\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{c^2 - c_s^2}, \sqrt{c_f^2 - c^2}\right)}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}}, & B_y^2 + B_z^2 \neq 0 \quad \text{or} \quad \gamma p \neq B_x^2 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), & B_y^2 + B_z^2 = 0 \quad \text{and} \quad \gamma p = B_x^2 \end{cases}$$

$$\left(\beta_y, \beta_z\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(B_y, B_z\right)}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}}, & B_y^2 + B_z^2 \neq 0 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), & B_y^2 + B_z^2 = 0 \end{cases}$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Решение задачи Римана (скорость)

$$V_x = \frac{\alpha_s^2 c_s^2}{2c^2}\left(v_x\left(c_s\tau\right) + v_x\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{\alpha_f^2 c_f^2}{2c^2}\left(v_x\left(c_f\tau\right) + v_x\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_f c_f \alpha_s c_s \beta_y sign\left(B_x\right)}{2c^2}\left(v_y\left(c_s\tau\right) + v_y\left(-c_s\tau\right) - v_y\left(c_f\tau\right) - v_y\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_f c_f \alpha_s c_s \beta_z sign\left(B_x\right)}{2c^2}\left(v_z\left(c_s\tau\right) + v_z\left(-c_s\tau\right) - v_z\left(c_f\tau\right) - v_z\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_f c_f \alpha_s \beta_y}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(-c_f\tau\right) - b_y\left(c_f\tau\right)\right) + \frac{\alpha_f c_s \alpha_s \beta_y}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(-c_s\tau\right) - b_y\left(c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_f c_f \alpha_s \beta_z}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(-c_f\tau\right) - b_z\left(c_f\tau\right)\right) + \frac{\alpha_f c_s \alpha_s \beta_z}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(-c_s\tau\right) - b_z\left(c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_f^2 c_f}{2\rho c^2}\left(p\left(-c_f\tau\right) - p\left(c_f\tau\right)\right) + \frac{\alpha_s^2 c_s}{2\rho c^2}\left(p\left(-c_s\tau\right) - p\left(c_s\tau\right)\right)$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Решение задачи Римана (скорость)

$$V_y = \frac{\alpha_f^2 c_f^2 \beta_y^2}{2c^2}\left(v_y\left(c_s\tau\right) + v_y\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{\alpha_s^2 c_s^2 \beta_y^2}{2c^2}\left(v_y\left(c_f\tau\right) + v_y\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f c_f \beta_y \alpha_s c_s}{2c^2}\left(v_x\left(c_s\tau\right) + v_x\left(-c_s\tau\right) - v_x\left(c_f\tau\right) - v_x\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_s^2 c_s^2 \beta_y \beta_z}{2c^2}\left(v_z\left(c_f\tau\right) + v_z\left(-c_f\tau\right)\right) + \frac{\alpha_f^2 c_f^2 \beta_y \beta_z}{2c^2}\left(v_z\left(c_s\tau\right) + v_z\left(-c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\beta_z^2}{2}\left(v_y\left(c_a\tau\right) + v_y\left(-c_a\tau\right)\right) + \frac{\beta_z \beta_y}{2}\left(v_z\left(c_a\tau\right) + v_z\left(-c_a\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f^2 c_f \beta_y^2}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(c_s\tau\right) - b_y\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{sign\left(B_x\right)\alpha_s^2 c_s \beta_y^2}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(c_f\tau\right) - b_y\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\beta_z^2}{2\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(c_a\tau\right) - b_y\left(-c_a\tau\right)\right) + \frac{sign\left(B_x\right)\beta_z \beta_y}{2\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(-c_a\tau\right) - b_z\left(c_a\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f^2 c_f \beta_y \beta_z}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(c_s\tau\right) - b_z\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{sign\left(B_x\right)\alpha_s^2 c_s \beta_y \beta_z}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(c_f\tau\right) - b_z\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f c_f \beta_y \alpha_s}{2\rho c^2}\left(p\left(-c_s\tau\right) + p\left(c_f\tau\right) - p\left(-c_f\tau\right) - p\left(c_s\tau\right)\right)$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Решение задачи Римана (скорость)

$$V_z = \frac{\alpha_f^2 c_f^2 \beta_z^2}{2c^2}\left(v_z\left(c_s\tau\right) + v_z\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{\alpha_s^2 c_s^2 \beta_z^2}{2c^2}\left(v_z\left(c_f\tau\right) + v_z\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f c_f \beta_z \alpha_s c_s}{2c^2}\left(v_x\left(c_s\tau\right) + v_x\left(-c_s\tau\right) - v_x\left(c_f\tau\right) - v_x\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\alpha_s^2 c_s^2 \beta_y \beta_z}{2c^2}\left(v_y\left(c_f\tau\right) + v_y\left(-c_f\tau\right)\right) + \frac{\alpha_f^2 c_f^2 \beta_y \beta_z}{2c^2}\left(v_y\left(c_s\tau\right) + v_y\left(-c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\beta_y^2}{2}\left(v_z\left(c_a\tau\right) + v_z\left(-c_a\tau\right)\right) - \frac{\beta_z \beta_y}{2}\left(v_y\left(c_a\tau\right) + v_y\left(-c_a\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f^2 c_f \beta_y \beta_z}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(c_s\tau\right) - b_y\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{sign\left(B_x\right)\alpha_s^2 c_s \beta_y \beta_z}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(c_f\tau\right) - b_y\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\beta_z \beta_y}{2\sqrt{\rho}}\left(b_y\left(c_a\tau\right) - b_y\left(-c_a\tau\right)\right) + \frac{sign\left(B_x\right)\beta_y^2}{2\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(-c_a\tau\right) - b_z\left(c_a\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f^2 c_f \beta_z^2}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(c_s\tau\right) - b_z\left(-c_s\tau\right)\right) + \frac{sign\left(B_x\right)\alpha_s^2 c_s \beta_z^2}{2c\sqrt{\rho}}\left(b_z\left(c_f\tau\right) - b_z\left(-c_f\tau\right)\right) +$$

$$\frac{sign\left(B_x\right)\alpha_f c_f \beta_z \alpha_s}{2\rho c^2}\left(p\left(-c_s\tau\right) + p\left(c_f\tau\right) - p\left(-c_f\tau\right) - p\left(c_s\tau\right)\right)$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Решение задачи Римана (магнитное поле)

$$B_y = \frac{\alpha_f^2\beta_y^2}{2}\left(b_y\left(c_s\tau\right)+b_y\left(-c_s\tau\right)\right)+\frac{\alpha_s^2\beta_y^2}{2}\left(b_y\left(c_f\tau\right)+b_y\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\beta_z^2}{2}\left(b_y\left(c_a\tau\right)+b_y\left(-c_a\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z}{2}\left(b_z\left(c_f\tau\right)+b_z\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_f^2\beta_y\beta_z}{2}\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)-$$
$$\frac{\beta_z\beta_y}{2}\left(b_z\left(c_a\tau\right)+b_z\left(-c_a\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_f\beta_y\alpha_s c_s\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_x\left(c_s\tau\right)-v_x\left(-c_s\tau\right)\right)+\frac{\alpha_s\beta_y\alpha_f c_f\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_x\left(c_f\tau\right)-v_x\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\beta_z^2\sqrt{\rho}sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_y\left(c_a\tau\right)-v_y\left(-c_a\tau\right)\right)+\frac{\alpha_f^2\beta_y^2 c_f sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_y\left(c_s\tau\right)-v_y\left(-c_s\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_s^2\beta_y^2 c_s sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_y\left(c_f\tau\right)-v_y\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\beta_z\sqrt{\rho}\beta_y sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_z\left(-c_a\tau\right)-v_z\left(c_a\tau\right)\right)+\frac{\alpha_f^2\beta_y c_f\beta_z sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_z\left(c_s\tau\right)-v_z\left(-c_s\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_s^2\beta_y c_s\beta_z sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_z\left(c_f\tau\right)-v_z\left(-c_f\tau\right)\right)$$
$$\frac{\alpha_s\beta_y\alpha_f}{2c\sqrt{\rho}}\left(p\left(c_f\tau\right)+p\left(-c_f\tau\right)-p\left(c_s\tau\right)-p\left(-c_s\tau\right)\right)$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Решение задачи Римана (магнитное поле)

$$B_z = \frac{\alpha_f^2\beta_z^2}{2}\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)+\frac{\alpha_s^2\beta_z^2}{2}\left(b_z\left(c_f\tau\right)+b_z\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\beta_y^2}{2}\left(b_z\left(c_a\tau\right)+b_z\left(-c_a\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z}{2}\left(b_y\left(c_f\tau\right)+b_y\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_f^2\beta_y\beta_z}{2}\left(b_y\left(c_s\tau\right)+b_y\left(-c_s\tau\right)\right)-$$
$$\frac{\beta_z\beta_y}{2}\left(b_y\left(c_a\tau\right)+b_y\left(-c_a\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_f\beta_z\alpha_s c_s\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_x\left(c_s\tau\right)-v_x\left(-c_s\tau\right)\right)+\frac{\alpha_s\beta_z\alpha_f c_f\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_x\left(c_f\tau\right)-v_x\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\beta_z\beta_y\sqrt{\rho}sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_y\left(c_a\tau\right)-v_y\left(-c_a\tau\right)\right)+\frac{\alpha_f^2\beta_y\beta_z c_f sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_y\left(c_s\tau\right)-v_y\left(-c_s\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z c_s sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_y\left(c_f\tau\right)-v_y\left(-c_f\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\beta_y^2\sqrt{\rho}\beta_y sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_z\left(-c_a\tau\right)-v_z\left(c_a\tau\right)\right)+\frac{\alpha_f^2 c_f\beta_z^2 sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_z\left(c_s\tau\right)-v_z\left(-c_s\tau\right)\right)+$$
$$\frac{\alpha_s^2 c_s\beta_z^2 sign\left(B_x\right)\sqrt{\rho}}{2c}\left(v_z\left(c_f\tau\right)-v_z\left(-c_f\tau\right)\right)$$
$$\frac{\alpha_s\beta_z\alpha_f}{2c\sqrt{\rho}}\left(p\left(c_f\tau\right)+p\left(-c_f\tau\right)-p\left(c_s\tau\right)-p\left(-c_s\tau\right)\right)$$

Метод решения высокого порядка точности МГД уравнений Эйлеров этап. Решение задачи Римана (давление)

$$P = \frac{\alpha_f^2}{2}\left(p\left(c_f\tau\right) + p\left(-c_f\tau\right)\right) + \frac{\alpha_s^2}{2}\left(p\left(c_s\tau\right) + p\left(-c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\rho\alpha_f^2 c_f}{2}\left(v_x\left(-c_f\tau\right) - v_x\left(c_f\tau\right)\right) + \frac{\rho\alpha_s^2 c_s}{2}\left(v_x\left(-c_s\tau\right) - v_x\left(c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\rho\alpha_f\alpha_s c_s\beta_y sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_y\left(c_f\tau\right) - v_y\left(-c_f\tau\right)\right) + \frac{\rho\alpha_f\alpha_s c_f\beta_y sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_y\left(c_s\tau\right) - v_y\left(-c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\rho\alpha_f\alpha_s c_s\beta_z sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_z\left(c_f\tau\right) - v_z\left(-c_f\tau\right)\right) + \frac{\rho\alpha_f\alpha_s c_f\beta_z sign\left(B_x\right)}{2}\left(v_z\left(c_s\tau\right) - v_z\left(-c_s\tau\right)\right) +$$

$$\frac{\sqrt{\rho}\alpha_f\alpha_s\beta_y c}{2}\left(b_y\left(c_f\tau\right) + b_y\left(-c_f\tau\right) - b_y\left(c_s\tau\right) - b_y\left(-c_s\tau\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{\rho}\alpha_f\alpha_s\beta_z c}{2}\left(b_z\left(c_f\tau\right) + b_z\left(-c_f\tau\right) - b_z\left(c_s\tau\right) - b_z\left(-c_s\tau\right)\right)$$

Процедура построения параболы

Приведем подробную процедуру построения параболы и параметров q_i^R, q_i^L, $\triangle q_i$, q_i^6. Для определенности будем конструировать кусочно-параболическую функцию произвольного параметра $q(x)$ на регулярной сетке с шагом h, на интервале $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. В общем виде парабола может быть записана как:

$$q(x) = q_i^L + \xi \left(\triangle q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi) \right)$$

где q_i – значение в центре ячейки, $\xi = (x - x_{i-1/2})h^{-1}$, $\triangle q_i = q_i^L - q_i^R$ и $q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$ при условии сохранения консервативности, то есть:

$$q_i = h^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx$$

Для конструирования значений $q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2}$ будем использовать интерполяционную функцию четвертого порядка точности:

$$q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta q_{i+1} - \delta q_i)$$

где $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$. Далее опишем алгоритм получения локальной параболы. На вход алгоритма подаются значения в точках ячеек q_i. На выходе алгоритма определяются все параметры кусочно-параболических функций на всех интервалах $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

Процедура построения параболы

Шаг 1. На первом шаге мы конструируем значения $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$. Для этого нам необходимо знание только соседних ячеек $q_{i+1}, qi - 1$. Для избежания экстремумов функций используем модификацию последней формулы для δq_i в виде:

$$\delta_m q_i = \begin{cases} min(|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|)sign(\delta q_i), \\ (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) > 0 \\ 0, (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) \leq 0 \end{cases}$$

В случае параллельной реализации на архитектурах с распределенной памятью мы должны сделать обмены одного слоя перекрытия расчетной области средствами MPI. После чего пересчитываем значения на границе с помощью интерполянта четвертого порядка точности:

$$q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta_m q_{i+1} - \delta_m q_i)$$

Процедура построения параболы

Шаг 2. На втором шаге алгоритма мы начинаем конструировать саму локальную параболу с помощью формулы:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R$$

$$q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$$

В случае немонотонности локальной параболы (такое имеет место на разрывах) мы перестраиваем значения на границах q_i^L, q_i^R по формулам:

$$q_i^L = q_i, q_i^R = q_i, (q_i^L - q_i)(q_i - q_i^R) \leq 0$$

$$q_i^L = 3q_i - 2q_i^R, \triangle q_i q_i^{(6)} > (\triangle q_i)^2$$

$$q_i^R = 3q_i - 2q_i^L, \triangle q_i q_i^{(6)} < -(\triangle q_i)^2$$

Таким образом, граничные значения удовлетворяют условиям монотонности.

Процедура построения параболы

Шаг 3. На третьем шаге перестроим параметры параболы с учетом новых значений на границах ячеек:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R$$

$$q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$$

В результате локальная парабола в каждой ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ получена. Стоит отметить, что параболы могут иметь разрыв на границах ячеек, что в случае использования классического кусочно-параболического метода (PPM) приводит к необходимости решения задачи Римана для парабол. В нашем случае локальные параболы используются как составная часть задачи Римана.

Процедура построения параболы

Шаг 4. На четвертом шаге происходит дополнительная монотонизация параболы. Если мы находимся в области разрыва рассматриваемой функции, тогда введятся дополнительный подправки в параболу:

$$q_i^{L,+} = q_i - \frac{1}{4}\delta_m q_i \qquad q_i^{R,+} = q_i + \frac{1}{4}\delta_m q_i$$

Вводим дополнительный критерий

$$\eta = -h^2 \frac{\delta_m^2 q_{i+1} - \delta_m^2 q_{i-1}}{q_{i+1} - q_{i-1}}$$

В случае если выполнено одно из следующих условий:

$$q_{i+1}q_{i-1} > 0 \qquad |q_{i+1} - q_{i-1}| - \frac{1}{100}\min(|q_{i+1}|, |q_{i-1}|, |q_{i+1}| + |q_{i-1}|) \le 0$$

значений критерия η обнуляется. Вес, с которым будет браться в расчетную схему значения $q_i^{L,+}$ и $q_i^{R,+}$ определяется по формуле:

$$\hbar = \max(\min(20(\eta - 0.05), 1), 0)$$

Итоговые значения потоков на границе вычисляются по формулам:

$$q_i^{L,FINAL} = (1 - \hbar)q_i^{L,+} + \hbar q_i^L \qquad q_i^{R,FINAL} = (1 - \hbar)q_i^{R,+} + \hbar q_i^R$$

Процедура Рунге-Кутта 4-го порядка

$$\frac{\partial \square}{\partial t} + \nabla \square (\square \cdot \vec{v}) = \Im(\square, \nabla \square)$$

$$\frac{\partial \square}{\partial t} + \nabla \square (\square \cdot \vec{v}) = 0 \qquad \frac{\partial \square}{\partial t} = \Im(\square, \nabla \square)$$

$$\frac{\partial \square}{\partial t} = R$$

$$\square^{(n+1/3)} = \square^{(n)} + \tau R^{(n)}$$

$$\square^{(n+2/3)} = \frac{3}{4}\square^{(n)} + \frac{1}{4}\square^{(n+1/3)} + \frac{\tau}{4} R^{(n+1/3)}$$

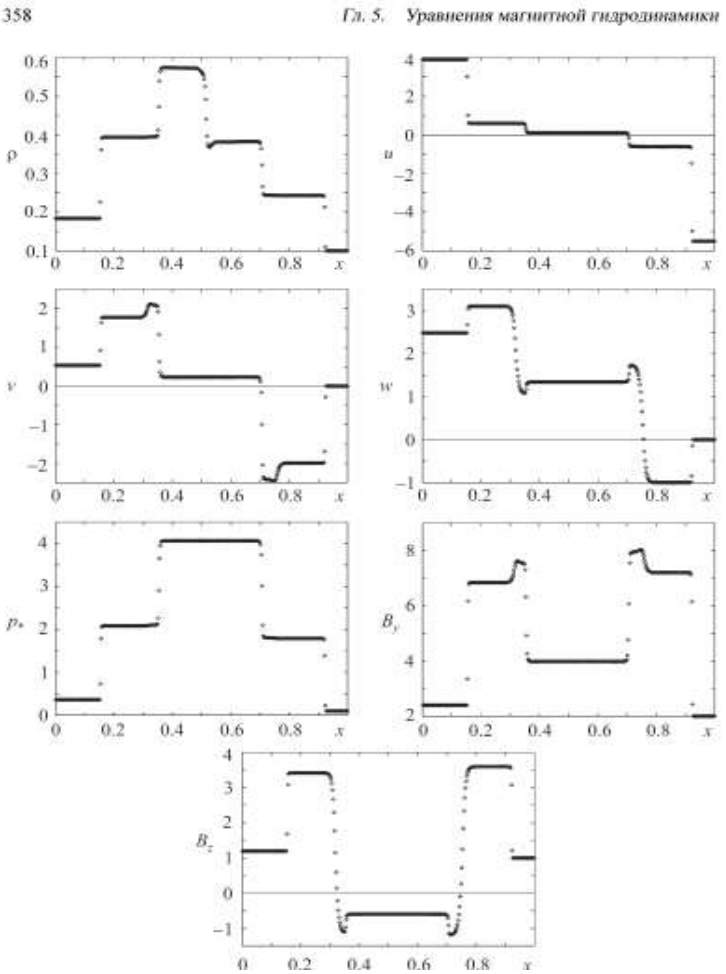
$$\square^{(n+1)} = \frac{1}{3}\square^{(n)} + \frac{2}{3}\square^{(n+2/3)} + \frac{2\tau}{3} R^{(n+2/3)}$$

МГД тест Погорелова

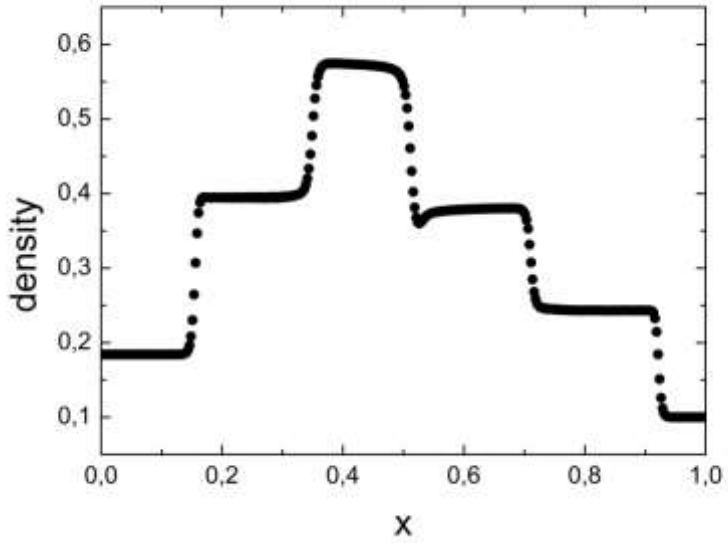
$$\left[\rho, p, v_x, v_y, v_z, \sqrt{4\pi}B_y, \sqrt{4\pi}B_z\right] = \begin{cases} \left[0.18405, 0.3541, 3.8964, 0.5361, 2.4866, 2.394, 1.197\right], & x < 0.5 \\ \left[0.1, 0.1, -5.5, 0, 0, 2, 1\right], & x \geq 0.5 \end{cases}$$

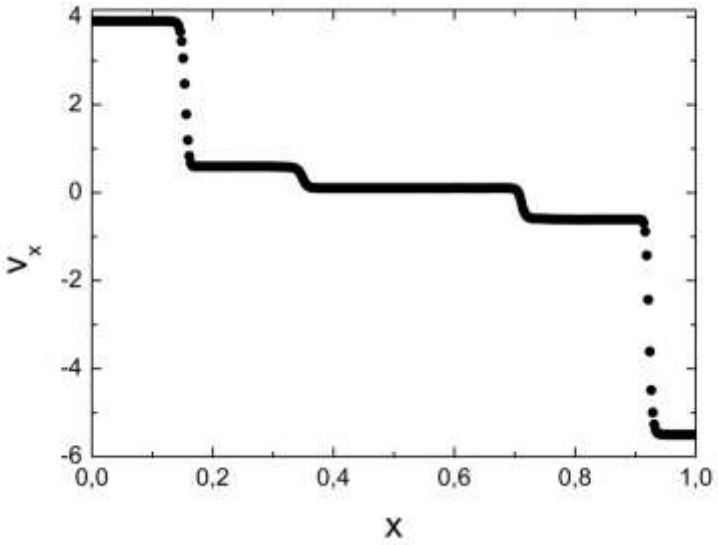
$$\sqrt{4\pi}B_x \equiv 4 \qquad t = 0.15$$

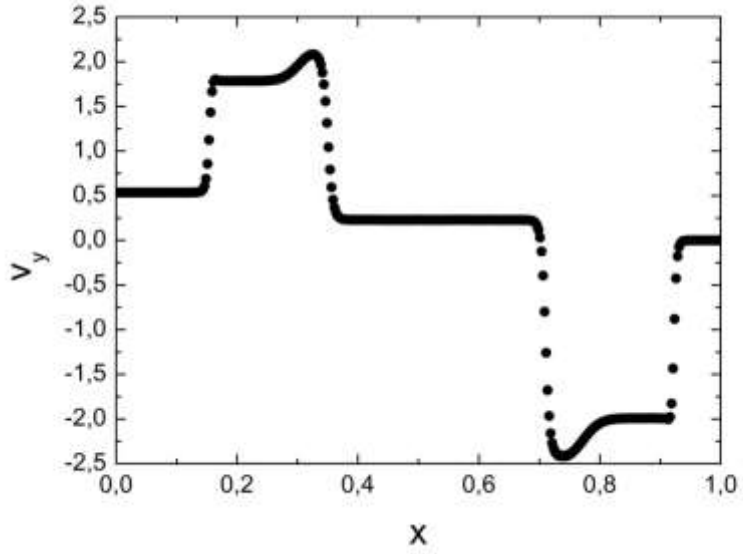
Pogorelov N., Zhurov A. High-resolution numerical methods for MHD equations // 8th Int. Symp. on Comput. Fluid Dyn., Bremen, Sept. 5-10, 1999. Collection of Papers, CD-ROM Publication, ZARM, Bremen

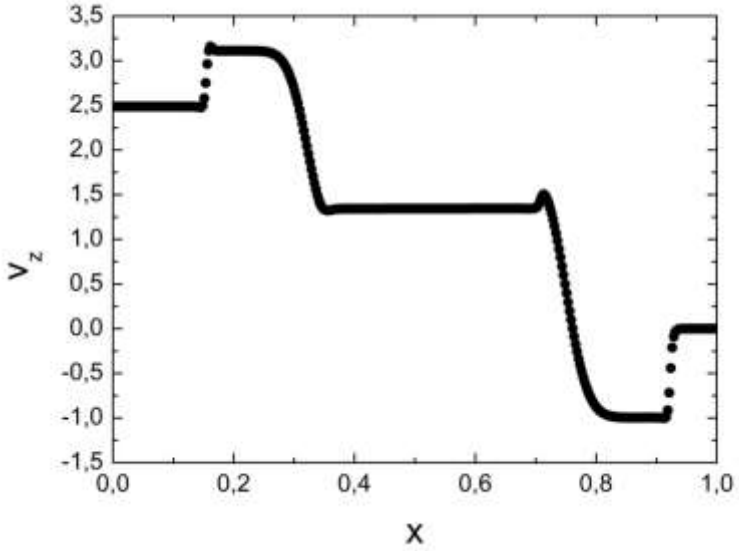


МГД тест Погорелова

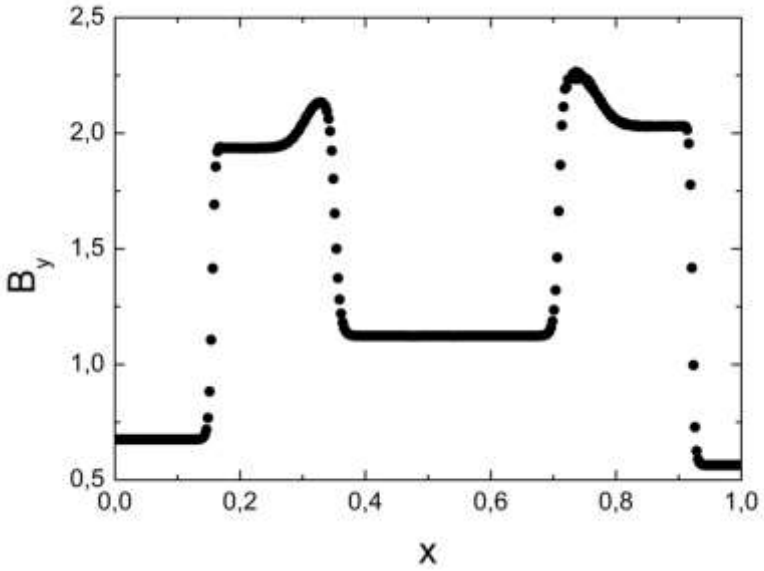


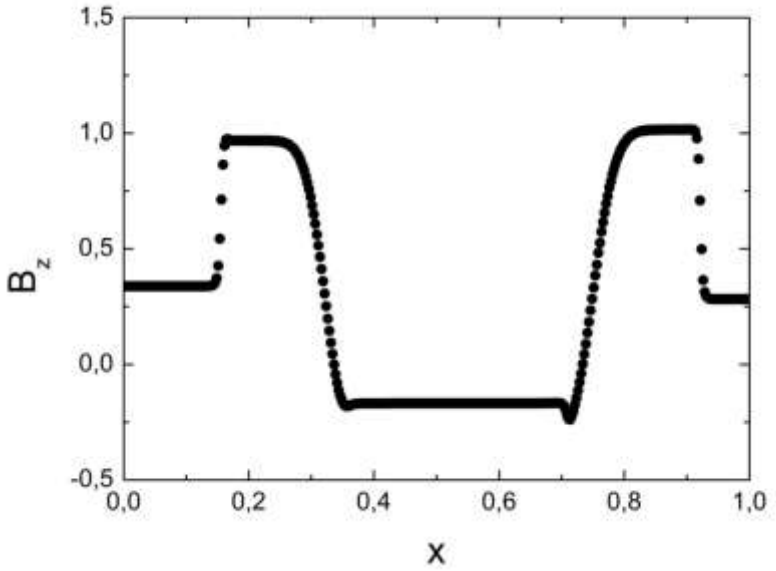


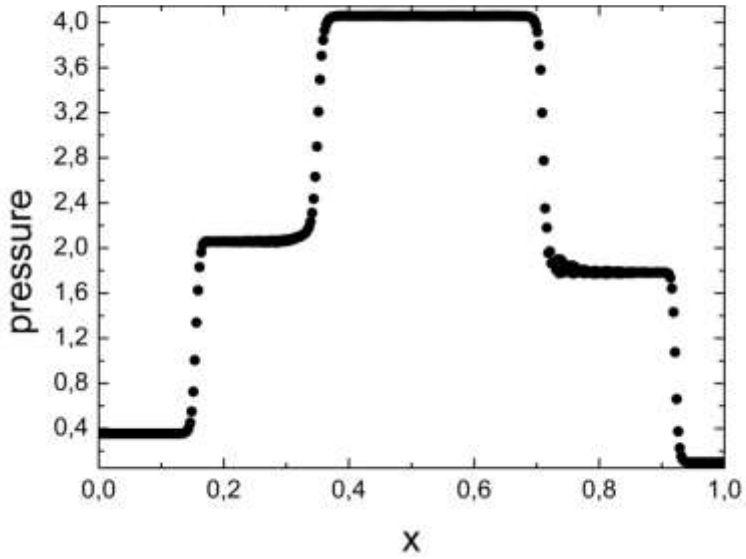


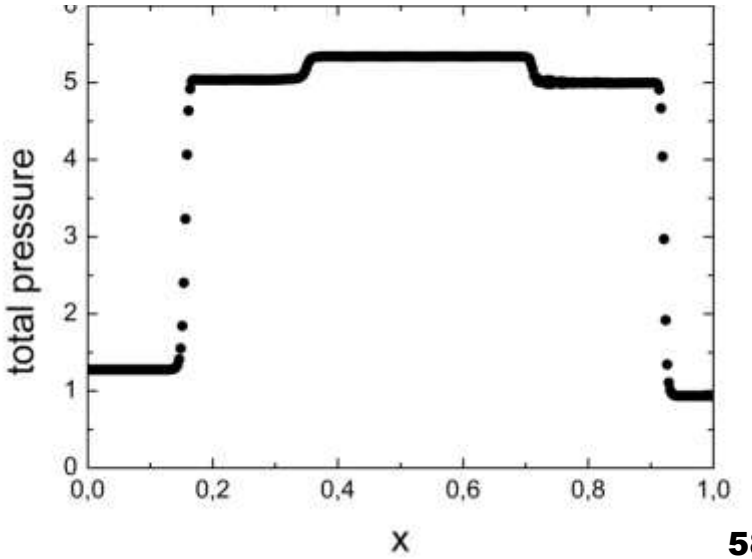


МГД тест Погорелова









State-of-Art программная реализация

- Высокий порядок точности численного метода
- Малая диссипация на разрывных решениях численного метода
- Отсутствие искусственной вязкости и лимитеров
- Многослойность по времени (Рунге-Кутта 4го порядка)
- Инвариантность относительно поворота
- Гарантия неубывания энтропии и сохранения основных инвариантов
- Реализация основных гиперболических моделей (газовая динамика, МГД, уравнения Больцмана, релятивистская газодинамика)
- Масштабируемая параллельная реализации на любой архитектуре
- Использование любых координат
- Включение большинства subgrid физики
- Технология подвижной сетки

Дальнейшая работа

- Моделирование столкновения скоплений галактик и галактик в космологическом контексте (*от крупномасштабных структур до отдельных галактик*)
- Глобальное МГД моделирование взаимодействия солнечного ветра с кометами, естественными спутниками и планетами (*движение галактик через межгалактический газ*)
- Взрыв сверхновой с химокинетикой (*178 химических и ядерных реакций*) в газодинамической и в модели релятивистской гидродинамики
- Реализация астрофизического кода до state-of-art уровня (Top10 астрофизических кодов до 2020 года)

Спасибо

за

внимание