

Суперкомпьютерные расчеты методом  
Монте-Карло в задаче о переносе излучения через  
случайную среду

Амбос Андрей Юрьевич

Новосибирск - 2018

## Статья "Оценка функциональных характеристик поля интенсивности проходящего через случайную среду излучения методом Монте-Карло":

- Исследование переноса частиц (квантов излучения) с рассеянием через стохастические среды (две модели)
- Получение численно-статистических оценок корреляционных характеристик и осредненных угловых распределений поля интенсивности излучения.
- Подтверждения предположения большой степени зависимости изучаемых величин от корреляционного масштаба и одномерного распределения поля плотности среды.

Рассматриваются две модели случайных полей:

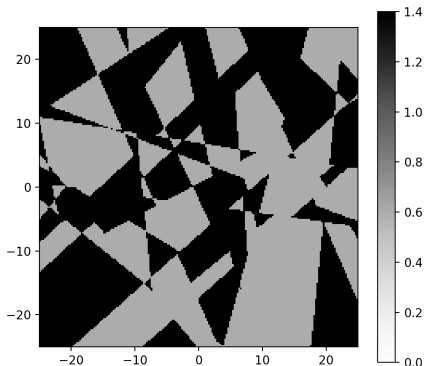


Рис. 1. Элементарное пуассоновское поле  $P$  с одномерным бернуллиевским распределением:  
 $P(\sigma = 0.6) = P(\sigma = 1.4) = 0.5$

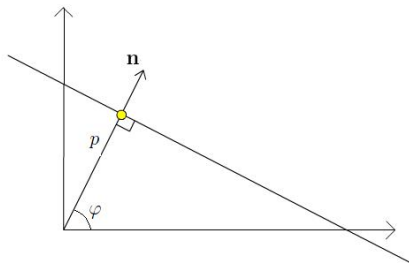


Рис. 3. Базовая плоскость (двумерный случай)

Каждая плоскость полностью определяется единичным вектором "внешней" нормали  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  и расстоянием  $p$  до начала координат  $O$ , то есть точкой  $(p, \mathbf{n})$  параметрического пространства  $T = R^+ \times S^{(3)}$ , где  $S^{(3)}$  - единичная сфера в  $R^3$  с центром в начале координат.

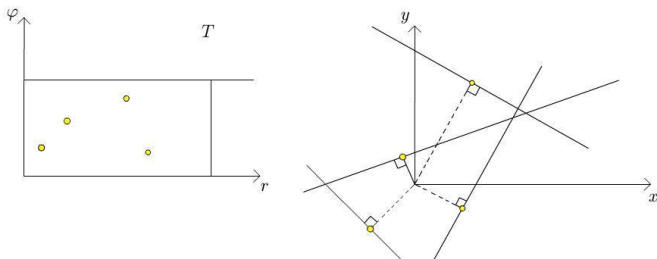


Рис. 4. Параметрическое пространство и соответствующие базовые плоскости

Рассмотрим пуассоновское точечное поле в пространстве  $T$  с параметром  $\lambda_p$ . Отождествив каждую точку этого поля с плоскостью, как указано выше, получаем требуемое поле  $\Gamma$  случайных плоскостей.

**Теорема.** Построенное поле  $\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , является однородным и изотропным с экспоненциальной корреляционной функцией  $K(r) = e^{-\pi\lambda_p r}$ .

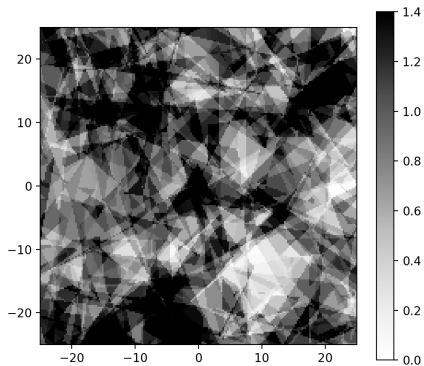


Рис. 2. "Реалистическое" поле  $\sigma_n$  с  $n = 10$

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(n)}(\mathbf{r}),$$

причём пуассоновские поля  $\{\sigma_i^{(n)}(\mathbf{r})\}$  независимы.

$$E\sigma^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{m}{n}, \quad D\sigma^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{d}{n}, \quad 0 < \sigma^{(n)}(\mathbf{r}) \leq a^{(n)} < +\infty.$$

При этом  $E\sigma_n(\mathbf{r}) = m = E\sigma$ ,  $D\sigma_n(\mathbf{r}) = d = D\sigma$ ,  $\rho_n = \rho$ , и, вследствие суммирования, можно надеяться на “реалистичность” условного одномерного распределения  $\sigma_n(\mathbf{r})$ .



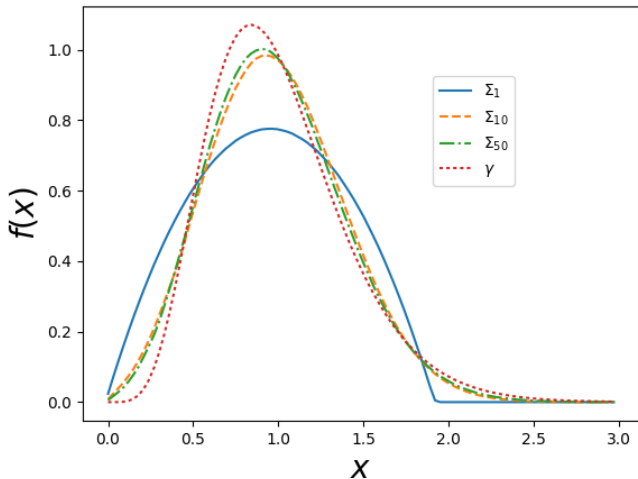


Рис. 2. Статистические оценки  $\tilde{f}_n(x)$  для  $n = 1, 10, 50$ , а также соответствующая гамма-плотность  $f_\gamma(x)$ .

Рассматривается односкоростной процесс переноса частиц через плоский слой вещества  $0 < x < H$  ( $H = 10, 20$ ) с коэффициентом ослабления  $\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , причём  $\sigma(\mathbf{r})$  - однородное изотропное случайное поле.

Выполняется равенство  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_c(\mathbf{r})$ , где  $\sigma_c(\mathbf{r})$  - коэффициент поглощения, а  $\sigma_s(\mathbf{r})$  - коэффициент рассеяния с индикатрисой рассеяния Хеньи-Гринштейна  $g(\mu)$ :

$$g(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - \mu_0^2}{(1 + \mu_0^2 - 2\mu_0\mu)^{3/2}},$$

причём вероятность “выживания” кванта  $\sigma_s(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r}) \equiv q = 0.9$ .

Средний косинус рассеяния  $\mu_0 = \int_0^1 \mu g(\mu) d\mu = 0.9$  близок к единице, то есть рассеяние существенно анизотропно.

Параметры простой детерминированной модели  $\bar{\sigma}$ :

$$\bar{\sigma}_s = 0.9, \quad \bar{\sigma}_c = 0.1.$$

Эффективно используется “метод двойной рандомизации” для оценки вероятностных моментов линейных функционалов  $J_n$ :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n J_k(\sigma)\right] = \mathbb{E}_{(\Omega_k, \sigma)}\left[\prod_{s=1}^n \xi_k(\Omega_k; \sigma)\right] = \mathbb{E}_{(\Omega_k, \sigma)}\zeta(\Omega_1, \dots, \Omega_n, \sigma).$$

Здесь  $\Omega_k$  ( $s = 1, \dots, n$ ) – условно-независимые траектории квантов излучения для реализации среды с плотностью  $\sigma$ , а  $\xi(\Omega; \sigma)$  – несмещенные оценки функционалов  $J_k(\sigma)$ , то есть  $\mathbb{E}_{\Omega}\xi_k(\Omega; \sigma) = J_k(\sigma)$ .

В частности, для оценки второго момента вероятности прохождения  $P_t(\sigma)$ :

$$EP_t^2(\sigma) = E_{(\Omega_1, \Omega_2, \sigma)} \xi(\Omega_1, \sigma) \xi(\Omega_2, \sigma),$$

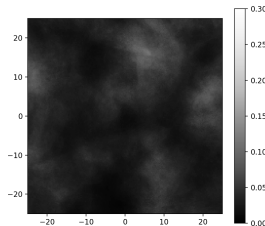
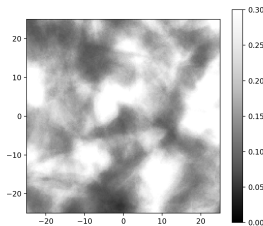
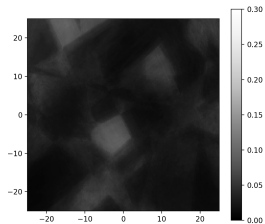
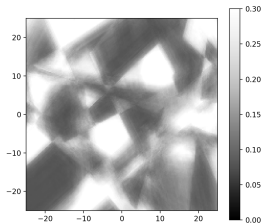
где  $\xi(\Omega_1, \sigma) = \exp(-\int_{\Omega_1} \sigma_c(\mathbf{r}) d\mathbf{r})$ .

В работе также использован метод “дельта-рассеяния” (метод максимального сечения) на основе неравенства  $\sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_m$ .

Для коррелирования сравнительных оценок используется техника “little-frog”, то есть последовательность псевдослучайных чисел разбивается на подпоследовательности для построения соответствующих траекторий частиц.

Вследствие эргодичности рассматриваемой системы вероятность прохождения кванта от достаточно протяжённого пограничного нормированного источника для представленных моделей стохастических сред близка к  $P_t$  практически для всех реализаций среды.





Поля проходящей радиации для толщин слоя  $H = 10$  и  $H = 20$ .

Функцию вида  $\omega_x \Phi((H, y, z), \omega)$  будем называть полем яркости проходящего излучения, а функцию  $I(H, y, z) = \int_{\Omega} \omega_x \Phi((H, y, z), \omega) d\omega$  - полем освещённости. Отметим, что  $I(H, y, z)$  - это плотность числа квантов пересекающих плоскость  $\{H, y, z\}$ .

Пусть показание детектора определяется величиной

$$I_T = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T I(y, z) dy dz.$$

Отметим, что для “горизонтально” однородных источника и стохастической среды имеем:  $E I_T(\sigma) = P_t$  и  $I_T(\sigma) \asymp_{T \rightarrow \infty} P_t$ .

Для двумерной области  $0 \leq y, z \leq T, z = H$  получено асимптотическое соотношение:

$$DI_T \asymp_{T \rightarrow \infty} T^{-2} DI \rho_2^{(t)}, \text{ где } \rho_2^{(t)} = \int_0^\infty 2\pi r K_I(r) dr,$$

где  $K_I(r)$  - нормированная корреляционная функция поля  $I(\sigma)$ , причём  $DI = DI(\sigma)$ :

$$K_I(r) = (E[I(\mathbf{r}_0, \sigma)I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \sigma)] - P_t^2) / DI, \quad |\mathbf{r}| = r$$

Величину  $\rho_2^{(t)}$  можно назвать “корреляционной площадью” случайного поля  $I(\mathbf{r})$ , по аналогии с корреляционной длиной:

$$\rho_1^{(t)} = \int_0^\infty K_I(r) dr,$$

Заметим, что оценка величины  $D|_T$  даёт возможность получить оценку корреляционной площади  $\rho_2^{(t)}$  для достаточно больших значений  $T$ ; при этом контроль точности получается сравнением полученных оценок для значений размеров  $T$  и  $T + \Delta T$ .

С целью оценки значений корреляционной функции  $K_I(r)$ , дисперсии  $DI$  и корреляционной площади  $\rho_2^{(t)}$  на основе “двойной рандомизации” можно использовать “метод сопряжённых блужданий”.

Методом двойной рандомизации можно оценивать корреляционную функцию поля яркости:

$$K_I(r) = \frac{E_{\sigma} E_{(\Omega_1^*, \Omega_2^*)} \xi^*(\Omega_1^*(\sigma; H, 0, 0)) \xi^*(\Omega_2^*(\sigma; H, r, 0)) - P_t^2}{DI(\sigma)}.$$

Оценки значений корреляционной площади  $\rho_2^{(t)}$  можно получить с помощью “тройной” рандомизации:

$$\rho_2^{(t)} = 2\pi(40E_\eta E_\sigma E_{(\Omega_1^*, \Omega_2^*)} \eta \xi^*(\Omega_1^*(\sigma; H, 0, 0)) \xi^*(\Omega_2^*(\sigma; H, \eta, 0)) - 800P_t^2)/DI(\sigma),$$

где  $\Omega^*(\sigma; H, \eta, 0)$  - случайная сопряжённая траектория, начинающаяся в точке  $(H, \eta, 0)$ ,  $\eta$  - равномерно распределённая на интервале  $0 < x < 40$ .

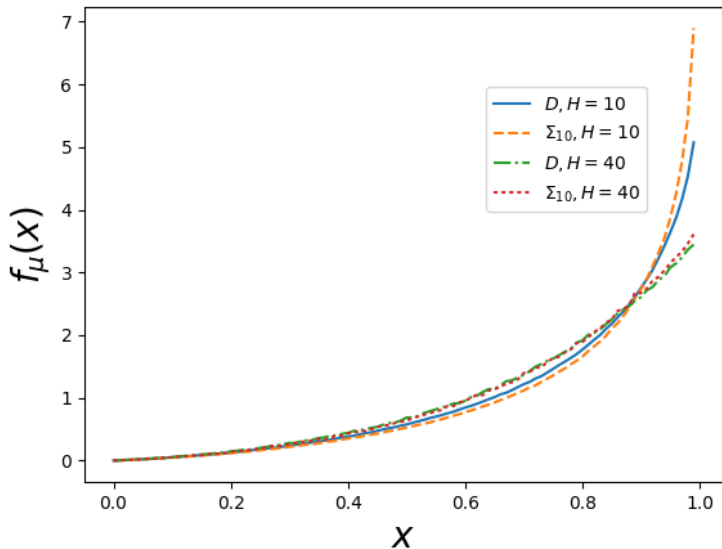


Строятся также оценки осреднённой по реализациям среды плотности углового распределения квантов прошедшего рассеяного излучения.

Для фиксированного  $\sigma(\mathbf{r})$  искомая субстохастическая (то есть не нормированная) плотность определяется формулой

$$f_{\mu}^{(s)}(x, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \Phi_s(H, \omega; \sigma) d\varphi,$$

где  $\Phi_s$  - плотность потока квантов, испытавших хотя бы одно рассеяние.



Нормированные условные угловые плотности для полей  $\Sigma_{10}$  и  $D$ ,  $H = 10, 40$ , число траекторий  $n = 10^7$ .

Таблица: Оценки  $P_t$  и  $P_d$  для  $H = 10$ ,  $N = 10^7$ .

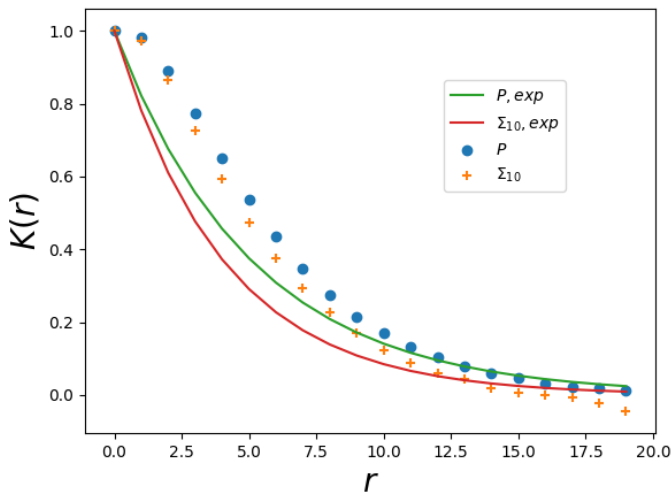
	$P_t$	$P_d$
$P$	$0.20576 \pm 5.8e-005$	$0.00051908 \pm 2.7e-007$
$\Sigma_{10}$	$0.20519 \pm 5.8e-005$	$0.00091222 \pm 1.7e-006$
$D$	$0.18087 \pm 4.6e-005$	0.0000453999

Таблица: Оценки дисперсий  $Dl_T$ . Число траекторий  $n = 10^7 \times 100$  для  $P$ ,  $n = 10^6 \times 100$  для  $\Sigma_{10}$ .

	$Dl$	$Dl_{70}$	$Dl_{80}$
$P$	$0.00790094 \pm 0.00013$	$0.00027066243 \pm 4.4e-6$	$0.00020136243 \pm 3.6e-6$
$\Sigma_{10}$	$0.00852421 \pm 0.00047$	$0.00019939473 \pm 1.4e-5$	$0.00013639473 \pm 1.1e-5$

Таблица: Оценки величин  $\rho_2^{(t)}$  и  $\lambda$ .

	$\rho_{2,70}^{(t)}$	$\rho_{2,80}^{(t)}$	$\lambda_{80}$
$P$	$167.859 \pm 0.0554$	$163.110 \pm 0.0495$	$0.196 \pm 0.000133$
$\Sigma_{10}$	$114.619 \pm 0.146$	$102.406 \pm 0.125$	$0.247 \pm 0.000428$



Статистические оценки  $K(r)$ , а также соответствующие экспоненциальные оценки. Число траекторий  $n = 3.2 \cdot 10^7 \times 10$  для  $P$ ,  $n = 3.2 \cdot 10^6 \times 10$  для  $\Sigma_{10}$ .